

UNE APPROCHE ALGORITHMIQUE POUR LE CALCUL DE L'HOMOLOGIE DE FONCTIONS CONTINUES

par

Madjid Allili

thèse présentée au Département de Mathématiques et d'Informatique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.).

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, février 1999



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-56984-5

Canada

Le 27 janvier 1999, le jury suivant a accepté cette thèse dans sa version finale.
date

Président-rapporteur: M. Jacques Dubois _____
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Shiping Liu _____
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Tomasz Kaczynski _____
Département de mathématiques et d'informatique

Membre externe: M. Konstantin Mischaikow _____
Georgia Institute of Technology

À la mémoire de mes parents.

À ma famille et mes amis, pour leur support constant tout au long de mes études.

«Si tu marchais sur un terrain plat, si tu avais la bonne volonté de marcher et que tu fisses néanmoins des pas en arrière, alors ce serait une affaire désespérée; mais comme tu gravis une pente aussi raide que toi-même vu d'en bas, les pas en arrière ne peuvent être provoqués que par la confirmation du sol et tu n'as pas à désespérer.»

Franz Kafka

(Journal intime)

À la mémoire du professeur Gilles Fournier.

SOMMAIRE

Les mathématiques d'aujourd'hui requièrent une adaptation rapide à une réalité largement dominée par une utilisation étendue des outils informatiques. Le développement grandissant de ces derniers peut alors profiter aux mathématiques par un apport direct dans la vérification de certaines propriétés réputées très longues et difficiles. Il est pour cela important de trouver des moyens (théories convenables) permettant de transformer et/ou réduire un problème mathématique donné à un problème concernant les ensembles finis (objets qu'on peut coder par un nombre fini de données).

Les preuves assistées par ordinateur de la présence du chaos dans les équations de Lorenz sont des exemples d'apports concrets de cette adaptation. Il est à noter qu' à la différence des preuves formelles faites avec l'ordinateur, les preuves assistées par ordinateurs sont conduites d'abord de façon rigoureuse et l'ordinateur n'intervient que lors de la vérification de certaines propriétés découlant de calculs numériques fastidieux lesquels sont soumis systématiquement à une analyse rigoureuse pour cerner les erreurs d'arrondis et de troncatures. Le calcul de l'homologie d'un ensemble ou d'une fonction s'inscrivent tout naturellement dans ces démarches. Grâce à l'introduction des notions d'ensembles et d'applications multivoques représentables comme outils de transition entre les objets des mathématiques du continua ayant de bonnes propriétés topologiques et les ensembles

finis, nous entreprenons dans le cadre de cette thèse l'algorithmisation du calcul de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue.

Ce procédé renforce l'idée de développer une discipline qui étudie les aspects combinatoires et calculatoires de problèmes à caractère topologique et qui a pour but la production d'algorithmes qui permettent le calcul avec l'ordinateur de structures et d'invariants topologiques.

REMERCIEMENTS

Ce travail de doctorat avait été amorcé sous la direction conjointe du professeur Tomasz KACZYNSKI et du regretté professeur Gilles FOURNIER. Je voudrais souligner combien ce fut regrettable de perdre cet éminent chercheur, cet intuitionniste remarquable, cet homme simple, très serviable et toujours souriant. Qu'il me soit permis ici de rendre hommage à sa mémoire.

J'adresse mes plus vifs remerciements au professeur Tomasz KACZYNSKI qui a dirigé et supervisé mes travaux de thèse et qui m'a soutenu moralement et financièrement. Tomasz est beaucoup plus qu'un superviseur. En plus de la tâche de supervision qu'il accomplit avec brio, il est également un bon conseiller et une personne extrêmement motivante et dotée de qualités humaines appréciables.

Je voudrais également remercier tout le personnel affable du département ainsi que tous mes professeurs qui m'ont donné un enseignement de qualité tout particulièrement le professeur Jacques DUBOIS qui se distingue en la matière. Je remercie spécialement le professeur Djemel ZIOU pour ses multiples et précieux conseils.

À tous mes ami(e)s, toute ma reconnaissance pour leurs encouragements incessants.

J'ai une pensée spéciale pour toute ma famille en Algérie dont le soutien et le sens du sacrifice m'ont permis de venir à bout de bien des difficultés et de beaucoup d'aberrations.

Table des matières

SOMMAIRE	iv
REMERCIEMENTS	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
TABLE DES FIGURES	x
INTRODUCTION	1
Chapitre 1 — Préliminaires	5
1.1 Définition des groupes d'homologie cubique singulière	8
1.2 Groupes d'homologie réduite de X	10
1.3 Homomorphisme induit dans l'homologie par une fonction continue . . .	11
1.4 Homologie relative	12
1.4.1 Suite exacte d'une paire	13
1.5 CW Complexes	14

1.5.1	Groupes d'homologie d'un CW Complexe	15
Chapitre 2 — Homomorphisme induit dans l'homologie par une applica-		
	tion représentable	16
2.1	Discrétisation de l'espace, ensembles représentables	17
2.1.1	Homologie des ensembles représentables	20
2.2	Applications représentables	22
2.3	Application de chaîne associée à une application représentable	30
2.4	Applications représentables et subdivisions	37
Chapitre 3 — Homomorphisme induit dans l'homologie par une applica-		
	tion continue	45
3.1	Grille produit et Théorème de Vietoris-Begle	46
3.2	Homologie d'une application continue	58
Chapitre 4 — Constructions et exemples		66
4.1	Construction de la cofrontière d'un cycle	66
4.2	Exemples de représentations	78
4.3	Application à l'indice de Conley	82
4.3.1	Voisinages isolants et paires pour l'indice	83
4.3.2	Définition de l'indice de Conley	86
4.3.3	Indice de Conley et applications représentables	88

CONCLUSION

90

BIBLIOGRAPHIE

92

Table des figures

2.1	Grille cubique de pas $\frac{1}{3}$ dans \mathbb{R}^2	19
3.1	Cellule centrale de $e =]0, 1[^2$ et $\text{st}_{\mathcal{E}_3}(]0, 1[^2)$	62
4.1	Exemple de construction de la cofrontière d'un cycle (dans le plan) . . .	76
4.2	Exemple de construction de la cofrontière d'un cycle (dans \mathbb{R}^3)	77
4.3	Exemple de représentation presque parfaite	79
4.4	Exemple de représentation parfaite	81

INTRODUCTION

Les applications récentes de la théorie de l'indice de Conley à l'étude du chaos dans les systèmes dynamiques (voir par exemple MISCHAIKOW et MROZEK[21], MISCHAIKOW et al.[22] et ZGLICZYNSKI[32]) se caractérisent par un mariage heureux entre les concepts abstraits de la topologie algébrique et les calculs numériques rigoureux effectués à l'aide de l'ordinateur. Les progrès significatifs réalisés dans ce domaine ne cessent de générer un intérêt énorme pour la production d'algorithmes de calcul des structures de topologie algébrique, en particulier, l'homologie des espaces et des applications.

Bien que l'approche combinatoire pour le calcul de structures topologiques ait été précédemment utilisée dans des domaines tels que: le coloriage des graphes, le traitement d'images, la cartographie, le graphisme ou le modelage moléculaire; on peut se référer à l'article de synthèse écrit récemment par DEY et al.[6] pour plus de détails et pour de plus amples discussions sur cette branche naissante que les auteurs proposent d'appeler la Topologie Calculatoire (Combinatoire ou encore Algorithmique), le calcul combinatoire de l'homologie des espaces et des applications est un sujet très récent et on ne retrouve dans la littérature que de rares travaux traitant des algorithmes et de leurs complexités pour le calcul des groupes d'homologie de polyèdres finis (voir DELFINADO et EDELSBRUNNER[4], DEY et GUHA[5] et KACZYNSKI et al.[15]) et il n'existe, à notre connaissance, aucun procédé algorithmique général pour le calcul des

homomorphismes induits dans l'homologie par des applications continues. Les différentes tentatives pour le calcul combinatoire de l'indice de point fixe ou du degré topologique d'une fonction se sont avérées non concluantes à part dans des cas de fonctions simples telles que les polynômes complexes ayant fait l'objet d'une étude de la part de LECKI et SZAFRANIEC[17]. Les insuccès enregistrés sont imputables d'abord au manque de procédés algorithmiques pour le calcul des objets relevant des mathématiques théoriques telles que la topologie algébrique. D'autre part, les outils mathématiques utilisés pour le calcul d'une application de chaîne induite par une application continue se basent sur les notions d'approximations simpliciales et de subdivisions barycentriques qui sont des objets difficilement représentables et qui engendrent des calculs très compliqués même dans des cas réputés simples.

Dans le cadre de ce travail, nous élaborons une approche combinatoire permettant la construction de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue basée sur des idées complètement différentes de celles des approximations simpliciales. Cela nous a permis de faire la construction algébrique précise de cet homomorphisme qui peut facilement se traduire dans un langage algorithmique. Nous reprenons et améliorons certains résultats déjà obtenus dans ALLILI et KACZYNSKI[2]. L'idée principale consiste à voir une application continue comme une sélection d'une application multivoque *représentable*, i.e. application multivoque dont le graphe est une réunion finie de cubes dans l'espace produit et dont les faces sont parallèles aux axes de coordonnées. Les applications représentables, introduites initialement par MISCHAIKOW et MROZEK[21], possèdent de bonnes propriétés topologiques (semi-continuité, homologie, ...), de plus, elles sont des objets qu'on peut représenter et coder avec un nombre fini de données. Elles constituent ainsi l'outil de transition entre les objets des mathématiques du continua ayant de bonnes propriétés topologiques et les objets combinatoires représentables avec un nombre fini de données. Les notions de *grilles convexes* et d'ensembles et applications représentables

sont introduites au début du Chapitre 2.

Nous montrons d'abord par le biais du Théorème 2.2 qu'il est possible d'associer à toute application multivoque représentable (parfaite ou presque parfaite) $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application de chaîne $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ construite explicitement et nous définissons (voir Définition 2.8) l'homomorphisme F_* induit par F dans l'homologie comme étant l'homomorphisme de groupes quotients induit par φ au niveau des groupes d'homologie, i.e.

$$F_* = \varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y).$$

Nous prouvons ensuite que cette définition est indépendante des choix de l'application de chaîne φ associée à F (voir Théorème 2.3) et de la subdivision sur X et Y (voir le Théorème 2.4). Nous vérifions également (voir le Théorème 3.2 et le Corollaire 3.1) que cette définition de F_* coïncide avec les définitions classiques des homomorphismes induits dans l'homologie par les applications univoques et multivoques. Nous réalisons une construction géométrique de l'application de chaîne φ associée à F dans la première section du Chapitre 4 de cette thèse.

Étant donnée une application continue $f : X \longrightarrow Y$ possédant une constante de Lipschitz ou un module de continuité uniforme, où X, Y sont des ensembles représentables, nous pouvons construire (voir le Théorème 2.1) une application multivoque représentable $F : X \longrightarrow Z = \text{st}_{\mathcal{E}_k}(Y)$ dont l'image est contenue dans un voisinage arbitraire de Y et ayant f comme sélection. Cela concrétise l'idée de voir f comme une sélection d'une application multivoque représentable F que nous appelons sa *représentation*. Les Théorèmes 3.4 et 3.5 et la formule (3.7) permettent de construire l'homomorphisme $f_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ induit par f dans l'homologie. Cela assure que la construction de f_* est algorithmisable et que l'homologie d'une application est une propriété qui se transfère d'une application multivoque admissible à chacune de ses sélections continues.

Cette dernière propriété se révèle très importante puisque dans les applications concrètes, la fonction f n'est pas connue de façon précise. Elle est souvent obtenue comme le résultat d'une investigation numérique où les estimations et analyses d'erreurs permettent seulement de déterminer des ensembles où ses valeurs exactes sont localisées. On obtient de cette façon une représentation multivoque de f , et il devient ainsi possible de vérifier certaines propriétés pour f via des calculs combinatoires finis sur sa représentation. Le développement de la théorie de l'indice de Conley pour des systèmes dynamiques multivoques discrets dont les générateurs sont des applications multivoques admissibles (voir KACZYNSKI et MROZEK[12]) est un exemple concret de cette démarche. Nous donnons une brève explication à la fin du Chapitre 4.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous commençons ce chapitre en précisant certaines notations et terminologies qui seront utilisées pour la suite de cette thèse.

Les ensembles d'entiers naturels, entiers relatifs et nombres réels sont dénotés respectivement par \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{R} . Nous désignons également par

$I = [0, 1]$ l'intervalle fermé unitaire de la droite réelle

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n copies, $n > 0$) l'espace Euclidien de dimension n .

$I^n = I \times I \times \dots \times I$ (n copies, $n > 0$) le n -cube unitaire de \mathbb{R}^n .

$E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, la boule fermée unité de \mathbb{R}^n .

$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, l'intérieur de E^n .

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, la frontière de E^n .

Par définition, I^0 dénotera le singleton $\{0\}$.

Avant d'aborder les aspects techniques auxquels nous voulons consacrer ce chapitre, voici un bref aperçu sur la théorie de l'homologie. De façon générale, la théorie de l'homologie se propose d'associer à chaque espace topologique X une suite d'êtres algébriques (groupes, modules, algèbres ou espaces vectoriels)

$$H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots, H_n(X), \dots,$$

où $H_n(X)$ est appelé usuellement le n -ième groupe d'homologie de X ou groupe d'homologie de X de dimension n . Le rang du groupe $H_0(X)$ correspond au nombre de composantes connexes de X , et de manière analogique, les groupes $H_1(X), H_2(X), \dots$ mesurent une sorte de "connexité supérieure" de X (le rang de $H_n(X)$ correspond au nombre de trous de dimension n dans X).

Étant donné deux espaces topologiques X et Y , la théorie de l'homologie associe à toute fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ une suite d'homomorphismes

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

Ces associations sont soumises aux règles suivantes

1. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme alors $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme pour tout n .
2. Si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont homotopes (c'est-à-dire qu'on peut déformer f de façon continue pour obtenir g) alors les homomorphismes f_* et g_* induits respectivement par f et g sont identiques pour tout n .

Ces règles impliquent notamment que la structure algébrique de $H_n(X)$ dépend uniquement du type homotopique de l'espace X et l'homomorphisme f_* induit par f dépend uniquement de la classe d'homotopie de f .

La théorie de l'homologie permet alors de classer, grâce à l'invariance topologique des groupes d'homologie, les espaces topologiques et de ramener l'étude de problèmes topologiques à celle de problèmes algébriques dont le traitement est beaucoup plus simple.

Il existe plusieurs façons différentes pour définir les groupes d'homologie d'un espace topologique. Toutes ces définitions se confondent dans le cas d'un espace "assez bon" comme le cas des polyèdres de \mathbb{R}^n . On peut citer à titre d'exemples, en allant des plus concrètes aux plus abstraites, l'homologie simpliciale, l'homologie cubique, l'homologie singulière et l'homologie de Čech.

Les applications de la théorie de l'homologie sont multiples et très importantes dans différents domaines des mathématiques. L'une des plus célèbres applications est le théorème du point fixe de Lefschetz qui s'énonce sous forme d'une condition suffisante pour l'existence d'un point fixe pour une fonction continue $f : X \longrightarrow X$ où X est un espace topologique satisfaisant certaines propriétés (Rétract Absolu de Voisinage par exemple). En effet, si le nombre de Lefschetz de f ,

$$\lambda(f) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{Tr}(H_n(f)) \neq 0,$$

où $H_n(f) : H_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ est l'homomorphisme induit dans l'homologie par f pour chaque n et Tr dénote la trace d'un endomorphisme, alors la fonction f possède un point fixe dans X . Cet invariant topologique est devenu un outil incontournable dans la théorie des équations différentielles.

L'indice de Conley, pour lequel nous consacrons une section à la fin du Chapitre 4, est également un invariant topologique dont la définition repose sur le concept de l'homologie (cohomologie). Il possède de nombreuses applications dans la théorie des équations diffé-

rentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles et dans les systèmes dynamiques.

1.1 Définition des groupes d'homologie cubique singulière

Pour la définition détaillée des groupes d'homologie d'un espace topologique, nous allons adopter l'approche de MASSEY[18] utilisant les cubes singuliers qui, selon notre point de vue, réalise un intéressant lien entre l'homologie cubique concrète destinée à un traitement algorithmique et calculatoire et l'homologie singulière abstraite.

Définition 1.1 *Un cube singulier de dimension n (ou n -cube singulier) dans un espace topologique X est, par définition, une application continue $T : I^n \longrightarrow X$ ($n \geq 0$)*

On dénotera alors par $Q_n(X)$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des n -cubes singuliers dans X .

Un n -cube singulier dans X , $T : I^n \longrightarrow X$, est dit dégénéré s'il existe un entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $T(x_1, \dots, x_n)$ ne dépende pas de x_i . Nous dénoterons dans la suite par $D_n(X)$ le sous-groupe de $Q_n(X)$ engendré par l'ensemble des n -cubes singuliers dégénérés dans X et nous formons le complexe de chaîne

$$C(X) = \{C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X), \quad n \geq 0\},$$

où $C_n(X)$ sera appelé le *groupe des n -chaînes cubiques singulières de X* . Notons que, puisque $D_0(X) = \{0\}$, alors $C_0(X) = Q_0(X)$.

Soit $T : I^n \longrightarrow X$ un n -cube singulier dans X . On définit, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, les $(n-1)$ -cubes singuliers $A_i T, B_i T : I^{n-1} \longrightarrow X$ appelés respectivement la i -ème face antérieure et la i -ème face postérieure par les formules

$$A_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$B_i T(x_1, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$

Propriétés 1.1 Pour tout $n > 1$ et $1 \leq i < j \leq n$, on a

$$A_i A_j(T) = A_{j-1} A_i(T)$$

$$B_i B_j(T) = B_{j-1} B_i(T)$$

$$A_i B_j(T) = B_{j-1} A_i(T)$$

$$B_i A_j(T) = A_{j-1} B_i(T)$$

Nous définissons alors l'opérateur de bord ∂ comme une suite d'homomorphismes

$$\partial_n : Q_n(X) \longrightarrow Q_{n-1}(X), \quad n \geq 1$$

Chaque ∂_n est complètement défini en précisant ses valeurs sur les éléments de base, i.e. les n -cubes singuliers.

Définition 1.2 Pour tout n -cube singulier T avec $n > 0$, on pose

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T]$$

On peut aisément vérifier à l'aide des propriétés 1.1 que

$$\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0 \quad (n > 1)$$

$$\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X) \quad (n > 0)$$

Il s'en suit que ∂_n induit un homomorphisme de $C_n(X)$ dans $C_{n-1}(X)$ qu'on dénotera encore par le même symbole ∂_n . Cette nouvelle suite d'homomorphismes

$$\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n, \dots,$$

satisfait l'équation $\partial_{n-1}\partial_n = 0$. Nous dénotons alors par $Z_n(X)$ ($n \geq 1$) le noyau de ∂_n qui est également appelé le *groupe des n -cycles de X* et par $B_n(X)$ ($n \geq 0$) l'image de ∂_{n+1} également appelé le *groupe des n -cycles frontières de X* . L'équation $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ a pour conséquence l'inclusion $B_n(X) \subset Z_n(X)$ ($n > 0$). Les groupes quotients

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) \quad (n > 0)$$

sont alors bien définis. Nous allons poser $C_n(X) = 0$ pour $n < 0$ et $\partial_n = 0$ pour tout $n \leq 0$. D'où $H_n(X) = 0$ pour tout $n < 0$, $Z_0(X) = C_0(X)$ et $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$. $H_n(X)$ est appelé le *n -ième groupe d'homologie singulière de X* ou *groupe d'homologie singulière de X de dimension n* .

1.2 Groupes d'homologie réduite de X

Considérons l'homomorphisme $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, appelé usuellement l'*augmentation de $C_0(X)$* , qui prend la valeur 1 sur les 0-cubes de X (on suppose que $X \neq \emptyset$). Il s'en suit que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ et $B_0(X) \subset \tilde{Z}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon)$ le noyau de ε . On peut donc définir

$$\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X)$$

appelé le *groupe d'homologie réduite de dimension 0 de X* . Comme la réduction se fait uniquement en dimension 0, on convient de noter $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ pour $n > 0$.

On peut démontrer (voir MASSEY[18]) que si X est un espace topologique connexe par arcs alors $\tilde{H}_0(X) = \{0\}$ et, de façon générale, $H_0(X)$ est une somme directe de groupes

cycliques infinis dont chaque terme correspond à une des composantes connexes par arcs de X .

1.3 Homomorphisme induit dans l'homologie par une fonction continue

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On peut d'abord définir une suite d'homomorphismes $f_{\#} : Q_n(X) \longrightarrow Q_n(Y)$ en posant $f_{\#}(T) = f \circ T$ pour tout n -cube singulier T de X ($n \geq 0$). Puisque $f_{\#}(D_n(X)) \subset D_n(Y)$, $f_{\#}$ induit un homomorphisme, qu'on dénotera encore $f_{\#}$, de $C_n(X)$ dans $C_n(Y)$. Nous obtenons alors, pour tout $n > 0$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

qui permet de déduire que $f_{\#}(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$ et $f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$. Il s'en suit alors que $f_{\#}$ induit un homomorphisme de groupes quotients dénoté par

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et qui est par définition l'homomorphisme induit dans l'homologie par la fonction f .

Le diagramme suivant est également commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & & \\ f_{\#} \downarrow & \searrow \varepsilon & \\ C_0(Y) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \end{array}$$

et de la même façon que précédemment, $f_{\#}$ induit un homomorphisme f_* de $\tilde{H}_0(X)$ dans $\tilde{H}_0(Y)$.

1.4 Homologie relative

Dans la plupart des cas, la définition abstraite des groupes d'homologie, ne permet pas de connaître les structures des groupes d'homologie d'un espace topologique donné. Un des moyens connus dans cette théorie pour pallier à ce manque est l'introduction des groupes d'homologie relative $H_n(X, A)$ d'une paire (X, A) où X est un espace topologique et A un sous-espace de X . Ces groupes constituent une généralisation des groupes d'homologie définis précédemment dans le sens où si $A = \emptyset$, alors $H_n(X, A) = H_n(X)$.

Soient A un sous-espace d'un espace topologique X et $i : A \longrightarrow X$ la fonction inclusion. Puisque l'homomorphisme $i_{\#} : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$ induit par i est en réalité un monomorphisme, on peut voir $C_n(A)$ comme un sous-groupe de $C_n(X)$. On dénote alors par $C_n(X, A)$ le groupe quotient $C_n(X)/C_n(A)$ et on l'appelle le *groupe des n -chaînes de la paire (X, A)* . L'opérateur de bord $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ satisfait la propriété $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$. Il induit donc un homomorphisme de groupes quotients qu'on dénotera par le même symbole $\partial_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$. En procédant de façon similaire que pour la définition de l'homologie singulière, on définit le *groupe des n -cycles de (X, A)* par $Z_n(X, A) = \text{Ker}(\partial_n)$, le *groupe des n -cycles frontières de (X, A)* par $B_n(X, A) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ et le *groupe d'homologie de dimension n de la paire (X, A)* par $H_n(X, A) = Z_n(X, A)/B_n(X, A)$. Notons que pour $n = 0$, on définit $Z_0(X, A) = C_0(X, A)$ et donc $H_0(X, A) = C_0(X, A)/B_0(X, A)$.

Intuitivement parlant, les groupes d'homologie relative $H_n(X, A)$ se définissent de la même manière que les groupes $H_n(X)$ mais en prenant soin de négliger tout ce qui se trouve dans le sous-espace A . En effet, si $u \in C_n(X)$, alors la classe de u dans le groupe quotient $C_n(X, A)$ est un cycle modulo A si et seulement si $\partial(u) \in C_{n-1}(A)$.

1.4.1 Suite exacte d'une paire

Nous dénotons par $j_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A)$ l'homomorphisme induit dans l'homologie par l'épimorphisme naturel $j_\# : C_n(X) \longrightarrow C_n(X, A)$ et par $i_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ l'homomorphisme induit dans l'homologie par l'inclusion $i : A \longrightarrow X$. Nous allons définir dans ce qui suit une troisième suite d'homomorphismes

$$\partial_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

appelés les *opérateurs frontières (ou de bord) de la paire* (X, A) .

Soit $u \in H_n(X, A)$. Choisissons $u' \in Z_n(X, A) \subset C_n(X, A)$, un représentant de la classe d'homologie de u . Comme $j_\#$ est un épimorphisme, il existe une chaîne $u'' \in C_n(X)$ satisfaisant $j_\#(u'') = u'$. Puisque $j_\#$ est une application de chaîne, on a $j_\# \partial(u'') = \partial j_\#(u'') = \partial(u') = 0$, car $u' \in Z_n(X, A)$; il s'en suit alors que $\partial(u'') \in C_{n-1}(A) \subset C_{n-1}(X)$. De plus, $\partial(u'')$ est un cycle. On définit alors $\partial_*(u)$ comme la classe d'homologie de $\partial(u'')$ dans $H_{n-1}(A)$. Il est aisément vérifiable que la définition de ∂_* est indépendante des choix des cycles u' et u'' et que ∂_* est bien un homomorphisme.

Avec la convention $H_n(A) = H_n(X) = H_n(X, A) = 0$, pour $n < 0$, nous obtenons la suite infinie

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

appelée la *suite homologique de la paire* (X, A) .

Le résultat suivant est alors d'une grande importance pour le calcul de groupes d'homologie d'un espace.

Théorème 1.1 *La suite homologique d'une paire d'espaces (X, A) est exacte. Cela veut*

dire que l'image de n'importe lequel des homomorphismes de la suite est égale au noyau de l'homomorphisme immédiat à sa droite.

1.5 CW Complexes

Une structure de *CW complexe* sur un espace topologique de Hausdorff X est la donnée d'une suite croissante de sous espaces fermés de X

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$$

satisfaisant les conditions suivantes

1. X^0 est muni de la topologie discrète.
2. X est la réunion des sous-espaces X^i , $i \geq 0$.
3. Pour $n > 0$, X^n est obtenu de X^{n-1} en recollant successivement une collection de n -cellules ouvertes disjointes e_λ^n , $\lambda \in \Lambda$ telles que pour chaque e_λ^n , il existe une application continue $f_\lambda^n : E^n \rightarrow \overline{e_\lambda^n}$, appelée *application caractéristique* pour la n -cellule e_λ^n , dont la restriction à U^n est un homéomorphisme de U^n dans e_λ^n et $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$.
4. L'espace X et les sous espaces X^i sont tous munis de la topologie faible: Un sous ensemble A est fermé si et seulement si $A \cap \overline{e_\lambda^n}$ est fermé pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Le sous ensemble X^n est appelé le *n -squelette* de X et les points de X^0 sont appelés *sommets* ou 0-cellules de X . Un CW complexe est dit *fini* si le nombre de ses cellules de toutes les dimensions est fini. Si $X = X^n$ pour un certain n , le CW complexe est dit de dimension finie et sa dimension est égale au plus petit entier naturel satisfaisant l'égalité précédente. Dans ce cas, la condition 4. devient superflue ce qui simplifie énormément l'étude des CW complexes finis.

1.5.1 Groupes d'homologie d'un CW Complexe

Soient $\mathcal{X} = \{X^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ (on posera $X^n = \emptyset$ pour $n < 0$) une structure de CW complexe sur un espace topologique X . Il est montré dans MASSEY[18], Théorème 2.1 du Ch. IX, que les groupes d'homologie relative $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0$ pour tout $q \neq n$ et que $H_n(X^n, X^{n-1})$ est un groupe abélien libre dont la base est en correspondance biunivoque avec les n -cellules de X^n .

On associe alors à X le complexe de chaîne définit comme suit:

$$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}),$$

et

$$d_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

qui est, par définition, la composition des homomorphismes

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

où ∂_* est l'opérateur de bord de la paire (X^n, X^{n-1}) et j_{n-1} est l'homomorphisme induit par l'inclusion comme définis dans la section 1.4. On peut alors vérifier la propriété $d_{n-1} d_n = 0$ et on dénotera comme dans la section 1.1 par $Z_n(X)$ le groupe des n -cycles de X et par $B_n(X)$ le groupe des n -cycles frontières de X . Les groupes d'homologie du CW complexe sont alors définis par

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

Chapitre 2

Homomorphisme induit dans l'homologie par une application représentable

Nous introduisons dans ce chapitre les notions d'ensemble et d'application représentables, de représentation d'une fonction continue et d'application de chaîne associée à une application représentable donnée. Nous commençons par discrétiser l'espace au moyen d'une grille convexe, définir une classe \mathcal{R} d'ensembles *représentables* qui sont des polyèdres de \mathbb{R}^n et des classes d'applications représentables, *parfaites* et *presque parfaites*, qui sont en gros des applications multivoques dont les graphes sont des polyèdres représentables dans l'espace produit et dont les propriétés particulières seront spécifiées plus tard. Une *représentation* d'une application continue f dans \mathbb{R}^n est tout simplement une application représentable $F : X \longrightarrow Y$, $X, Y \in \mathcal{R}$, avec des valeurs convexes ou étoilées et dont le graphe contient le graphe de f . Nous donnons ensuite une construction explicite de

l'application de chaîne

$$\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$$

associée à F et telle que l'application quotient au niveau des groupes d'homologie, i.e., $\varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ correspond à la définition classique de $F_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ basée sur le théorème de Vietoris-Begle (voir BEGLE[3] et SIEGBERG-SKORDEV[28]).

Dans ce chapitre, on donne les fondements nécessaires à la construction géométrique de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue f dont le domaine est un ensemble représentable via une quelconque de ses représentations F . Cela représente un pas important vers la construction algorithmique de f_* .

2.1 Discrétisation de l'espace, ensembles représentables

Définition 2.1 Une famille $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est appelée une grille convexe dans \mathbb{R}^n si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $e \in \mathcal{E} \implies e$ est un polyèdre convexe sans frontière.
2. $e \neq e' \implies e \cap e' = \emptyset$.
3. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e$.
4. $B \subset \mathbb{R}^n$ borné $\implies stB := \{e \in \mathcal{E} : \bar{e} \cap \bar{B} \neq \emptyset\}$ est fini. La notation \bar{A} désigne la fermeture de A dans \mathbb{R}^n .

Tout élément e de \mathcal{E} est appelé cellule élémentaire. On écrit $e' \leq e$ si $e, e' \in \mathcal{E}$ et e' est une face de e . On écrit $e' < e$ si e' est une face propre de e . Nous dénotons par \bar{e}

l'union de toutes les faces de e .

Remarque 2.1 La condition 1 de la définition précédente implique que pour chaque $e \in \mathcal{E}$, \bar{e} est homéomorphe à la boule unité fermée $E^{|e|}$ d'un certain espace euclidien $\mathbb{R}^{|e|}$. Le nombre $|e|$ est uniquement déterminé par l'invariance de la dimension. Il est appelé la dimension de e .

La grille \mathcal{E} contient nécessairement des cellules de dimension n . On peut facilement démontrer que \mathcal{E} contient alors des cellules de dimension q pour tout $0 \leq q \leq n$.

Exemple 2.1 Toute triangulation simpliciale de \mathbb{R}^n forme une structure de grille convexe dans \mathbb{R}^n où les cellules élémentaires sont simplement les simplexes de la triangulation.

Exemple 2.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La famille \mathcal{E}_k formée par les éléments e_k tels que

$$e_k = \frac{1}{k}(x + Q),$$

où, $x \in \mathbb{Z}^n$, $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ et $I_j =]0, 1[$, $\{0\}$ ou $\{1\}$, est une grille convexe dans \mathbb{R}^n appelée la grille cubique de pas $\frac{1}{k}$.

Remarques et notations. Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et \mathcal{E} une grille convexe. X est dit être *représentable* relativement à \mathcal{E} s'il existe une sous-famille finie \mathcal{E}' de \mathcal{E} telle que

$$X = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e = \overline{X}.$$

La famille \mathcal{E}' est appelée grille convexe dans X et est dénotée par $\mathcal{E}(X)$. On utilisera dans ce qui suit les notations $\mathcal{E}^q(X)$ pour l'ensemble de toutes les cellules élémentaires de dimension q contenues dans X ($\mathcal{E}^0(X)$ pour l'ensemble de tous les sommets de \mathcal{E} contenus dans X), $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ (\mathcal{R} si aucune confusion n'est à craindre) pour la famille de tous

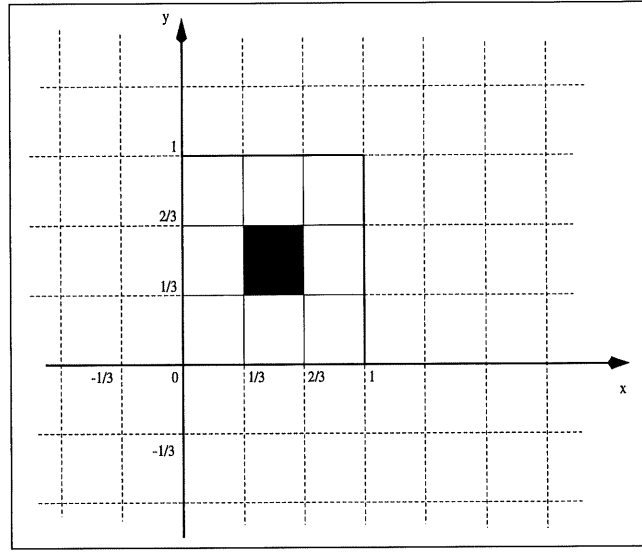


FIG. 2.1 – Grille cubique de pas $\frac{1}{3}$ dans \mathbb{R}^2 .

les polyèdres représentables de \mathbb{R}^n relativement à \mathcal{E} et $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X)$ ($\mathcal{R}(X)$ s'il n'y a aucun risque de confusion) pour la famille de tous les polyèdres représentables de \mathbb{R}^n relativement à \mathcal{E} et contenus dans X .

Chaque élément x de X appartient à une et une seule cellule de $\mathcal{E}(X)$.

Soit B un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On dénotera par $\text{co}_{\mathcal{E}}B$ le plus petit ensemble convexe fermé qui est une réunion de cellules de la grille convexe \mathcal{E} et qui contient B . En général, cette union peut être infinie (il pourrait y arriver que $\text{co}_{\mathcal{E}}B = \mathbb{R}^n$) même dans le cas où B est un ensemble borné. On ajoutera alors à la définition de la grille convexe l'axiome suivant:

5. Si B est borné alors $\text{co}_{\mathcal{E}}B \in \mathcal{R}$.

Cet axiome est trivialement satisfait dans le cas des exemples précédents. Si par exemple

\mathcal{E} est une grille cubique, alors $\text{co}_{\mathcal{E}}B \in \mathcal{R}$ puisqu'il est un produit d'intervalles.

Définition 2.2 Soient \mathcal{E} une grille convexe dans \mathbb{R}^n et $X \in \mathcal{R}$. Une cellule $\sigma \in \mathcal{E}(X)$ est dite primitive dans X s'il n'existe aucune cellule $\tau \in \mathcal{E}(X)$ telle que σ est une face propre de τ .

Exemple 2.3 Le carré noir de la Figure 2.1 est une cellule primitive de la grille cubique \mathcal{E}_3 .

2.1.1 Homologie des ensembles représentables

Étant donné une grille convexe \mathcal{E} dans \mathbb{R}^n et un ensemble représentable X relativement à \mathcal{E} , la grille convexe $\mathcal{E}(X)$ définit sur X une structure de CW complexe où, pour $q \geq 0$, le q -squelette de X est l'ensemble

$$X^q = \cup \{ \sigma : \sigma \in \mathcal{E}^i(X), \quad i = 0, 1, \dots, q \}.$$

On voit bien que X^q s'obtient de X^{q-1} en recollant successivement les q -cellules $e \in \mathcal{E}^q(X)$, et les applications caractéristiques pour ces q -cellules sont obtenues naturellement du fait que la frontière géométrique $\text{bd}(e)$ de chaque q -cellule e est contenue dans le $(q-1)$ -squelette $X^{q-1} = \cup \{ \sigma : \sigma \in \mathcal{E}^i(X), \quad i = 0, 1, \dots, q-1 \}$ de X .

Nous rappelons que le groupe des q -chaînes de X , $C_q(X, \mathcal{E}) = H_q(X^q, X^{q-1})$ est la somme directe des groupes $H(\bar{e}, \text{bd}(e)) \approx \mathbb{Z}$ avec $e \in \mathcal{E}^q(X)$. On peut alors identifier $C_q(X, \mathcal{E})$ avec le groupe abélien libre engendré par $\mathcal{E}^q(X)$. Les éléments de $\mathcal{E}^q(X)$ sont les générateurs positifs de $C_q(X, \mathcal{E})$. Pour la définition générale de l'opérateur de bord $\partial_q : C_q(X, \mathcal{E}) \rightarrow C_{q-1}(X, \mathcal{E})$ définissant la structure de complexe de chaîne sur $C(X, \mathcal{E}) = \{C_q(X, \mathcal{E})\}_{q \in \mathbb{Z}}$, nous référons à MASSEY[18], chapitre IX. Cependant, nous

allons donner la définition explicite dans le cas d'une grille cubique \mathcal{E}_k décrite dans l'exemple 2.2, ce qui est d'un intérêt principal pour nous dans la suite de ce texte.

Pour avoir une idée claire, il est suffisant de présenter la définition lorsque $k = 1$. Premièrement, pour la cellule $e = J^q =]0, 1[^q \subset \mathbb{R}^q$, nous définissons pour tout $1 \leq i \leq q$

$$A_i e = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_q) : x \in I^q\}$$

et

$$B_i e = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_q) : x \in I^q\}$$

Les ensembles $A_i e$ et $B_i e$ sont appelés, respectivement, la *i-ème face antérieure* et la *i-ème face postérieure* de e . Soit $e \in \mathcal{E}^q(X)$. Il existe $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $e = x + Q$ avec $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, où $I_j =]0, 1[$, $\{0\}$ ou $\{1\}$. Comme e est de dimension q , il y a exactement q indices j tels que $I_j =]0, 1[$. Ordonnons alors ces indices dans l'ordre croissant $d_1 < d_2 < \dots < d_q$. On constate alors que e est l'image de $J^q =]0, 1[^q$ par l'application affine T , définie par

$$\{T(y_1, y_2, \dots, y_n)\}_j = \begin{cases} x_j & \text{si } I_j = \{0\} \\ x_j + 1 & \text{si } I_j = \{1\} \\ x_j + y_k & \text{si } j = d_k \end{cases}$$

L'application T est composée de l'insertion de zéros dans les $(n - q)$ coordonnées qui correspondent aux indices j tels que $I_j \neq]0, 1[$ avec la translation de l'origine au sommet $x \in \mathbb{Z}^n$. Posons $A_i e = T(A_i J^q)$, $B_i e = T(B_i J^q)$ et définissons l'opérateur de bord en dimension q par

$$\partial_q e = \sum_{i=1}^q (-1)^i (A_i e - B_i e)$$

Pour la vérification du fait que ∂ est une application de chaîne et de la propriété $\partial \circ \partial = 0$,

nous référons encore à MASSEY[18], chapitre VII.

2.2 Applications représentables

Une application $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, où X et Y sont deux ensembles arbitraires, est appelée application multivoque de X dans Y . L'image $F(A)$ de $A \subset X$, le graphe $G(F)$ de F , l'inverse $F^{-1} : Y \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ de F et le domaine effectif $D(F)$ de F sont définis par

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x), \quad G(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\},$$

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}, \quad y \in Y, \quad \text{et} \quad \text{dom } F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

Soient X et Y des espaces métriques. On dit que $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si $\{x \in \text{dom } F : F(x) \subset U\}$ est ouvert pour tout sous-ensemble ouvert U de Y . De façon équivalente, $\{x \in \text{dom } F : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout sous-ensemble fermé A de Y .

Définition 2.3 Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque telle que $\text{dom } F \in \mathcal{R}(X)$ et $F(x) \in \mathcal{R}(Y)$ pour tout x dans $\text{dom } F$. On dit que F est représentable relativement à $\mathcal{E}(X)$ si

1. $F(x) = F(y) \quad \forall x, y \in e, \quad \forall e \in \mathcal{E}(X)$.
2. $G(F) = \overline{G(F)}$, où $G(F)$ dénote le graphe de F .

Proposition 2.1 Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application représentable. Pour tout $e, e' \in \mathcal{E}(X)$,

$$e' \leq e \implies F(e) \subseteq F(e').$$

Il s'en suit que

$$\forall e \in \mathcal{E}(X) \quad \cup \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \in \mathcal{E}(X)\} \subset F(e).$$

Preuve. Fixons $x \in e'$. Comme e' est une face de e , il suit que $x \in \bar{e}$. Il existe donc une suite $\{x_n\} \subset e$ telle que $x_n \rightarrow x$. Soit $y \in F(e)$. Par définition $y \in F(x_n)$, $\forall n$, i.e. $(x_n, y) \in G(F)$, $\forall n$. Puisque $G(F)$ est fermé, il suit alors que $(x, y) \in G(F)$, i.e. $y \in F(x) = F(e')$. \square

Dans ce qui suit, nous introduisons les notions d'applications *parfaite* et *presque parfaite* et de *représentation* d'une application continue dont le domaine est un sous-ensemble représentable de \mathbb{R}^n . Nous allons également indiquer une méthode pour construire une représentation presque parfaite pour une application continue donnée.

Soit $F : X \rightarrow \mathcal{R}(Y)$ une application représentable relativement à la grille \mathcal{E} . Pour toute cellule $e \in \mathcal{E}$, nous définissons

$$\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}}(e) = \cap \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \in \mathcal{E}(X)\}.$$

Nous utiliserons cependant la notation $\mathcal{A}_F(e)$ sauf si la compréhension risque d'être altérée.

Définition 2.4 Soit $X \in \mathcal{R}$ et $F : X \rightarrow \mathcal{R}$ une application multivoque représentable relativement à $\mathcal{E}(X)$ avec $\text{dom } F = X$. On dit que F est une application parfaite relativement à $\mathcal{E}(X)$ si

1. $F(x)$ est convexe et fermée $\forall x \in X$.
2. $F(e) = \cap \{F(v) : v \leq e, v \in \mathcal{E}^0(X)\} \quad \forall e \in \mathcal{E}(X)$.
3. $\mathcal{A}_F(v) \neq \emptyset, \quad \forall v \in \mathcal{E}^0(X)$.

Remarque 2.2 Il est clair, à partir de la définition d'une application représentable, que

$$F(e) \subset \cap \{F(v) : v \leq e, v \in \mathcal{E}^0(X)\}.$$

Proposition 2.2 *Pour une application représentable F , La condition 3 de la définition précédente est équivalente à la propriété suivante:*

$$\mathcal{A}_F(e) = \cap \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \in \mathcal{E}(X)\} \neq \emptyset \quad \forall e \in \mathcal{E}(X)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\mathcal{A}_F(v) \subset \mathcal{A}_F(e)$ si $v \leq e$. □

Proposition 2.3 *Soit F une application représentable relativement à $\mathcal{E}(X)$ et ayant des valeurs convexes et fermées (i.e., F satisfait la condition 1 de la définition de l'application parfaite). La condition 3 de la définition de l'application parfaite, i.e.*

$$\mathcal{A}_F(v) = \cap \{F(e) : v \leq e, e \in \mathcal{E}(X)\} \neq \emptyset \quad \forall v \in \mathcal{E}^0(X), \quad (2.1)$$

est équivalente au fait que l'application F possède une sélection continue f .

Preuve. En effet, si f est une sélection continue de F et $v \in \mathcal{E}^0(X)$, alors $f(v) \in F(e)$ pour tout $e \in \mathcal{E}(X)$ tel que $v \leq e$. D'où $f(v) \in \mathcal{A}_F(v)$. Réciproquement, si F satisfait la formule 2.1, on peut alors définir f sur les sommets en choisissant $f(v) \in \mathcal{A}_F(v)$ pour tout $v \in \mathcal{E}^0(X)$. Puisque $\mathcal{A}_F(v) \neq \emptyset$ et F a des valeurs convexes fermées, la définition de f s'étend à toutes les cellules convexes par linéarité pour obtenir une sélection continue de F . □

Définition 2.5 *Une application multivoque représentable $F : X \longrightarrow \mathcal{R}$ avec $\text{dom } F = X$, est appelée presque parfaite relativement à $\mathcal{E}(X)$ si les axiomes suivants sont satisfaits*

1. $F(\sigma)$ est convexe fermée pour toute cellule primitive $\sigma \in \mathcal{E}(X)$.

$$2. F(e) = \cup \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\} \quad \forall e \in \mathcal{E}(X).$$

$$3. \mathcal{A}_F(v) \neq \emptyset \text{ pour tout sommet } v \in \mathcal{E}^0(X).$$

On peut voir facilement que

Lemme 2.1 *Soit F une application parfaite ou presque parfaite relativement à $\mathcal{E}(X)$.*

On a les propriétés suivantes:

$$1. \forall e \in \mathcal{E}(X) \quad \mathcal{A}_F(e) = \cap \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\}.$$

$$2. \text{ Si } F \text{ possède une sélection continue } f \text{ alors } f(e) \subset \mathcal{A}_F(e) \text{ pour tout } e \in \mathcal{E}(X).$$

Preuve. L'inclusion directe \subset dans 1 est triviale. Prouvons l'autre inclusion. Soit $x \in F(\sigma)$ pour toute cellule primitive σ ayant e comme face. Soit $\gamma \in \mathcal{E}(X)$ telle que $e \leq \gamma$. Il existe une cellule primitive σ telle que $e \leq \gamma \leq \sigma$. D'où $F(\sigma) \subset F(\gamma)$ et alors $x \in F(\gamma)$. Considérons maintenant $e \in \mathcal{E}(X)$ et σ une cellule primitive telle que $e \leq \sigma$. Puisque f est continue et $F(\sigma)$ est convexe fermée, on déduit que

$$f(e) \subset f(\bar{\sigma}) \subset \overline{f(\sigma)} \subset \overline{F(\sigma)} \subset F(\sigma).$$

D'où $f(e) \subset \mathcal{A}_F(e)$. □

Pour une application parfaite ou presque parfaite F , l'ensemble $\mathcal{A}_F(e)$ est convexe et non vide pour tout $e \in \mathcal{E}(X)$. De plus $\mathcal{A}_F(e) \subset F(e)$. Il en résulte alors que $F(e)$ est étoilé pour tout $e \in \mathcal{E}(X)$.

La philosophie derrière les définitions d'applications parfaites et presque-parfaite est la suivante: les applications parfaites sont naturellement construites en définissant leurs valeurs sur les sommets de X , i.e. les éléments de $\mathcal{E}^0(X)$, et en étendant la définition aux cellules de dimension supérieure par intersection. Elles sont par conséquent beaucoup plus

naturelles et faciles à définir et à manier sur le plan théorique que les applications presque parfaites qui sont construites dans l'ordre inversé. On définit d'abord leurs valeurs sur les cellules de dimension supérieure puis on descend jusqu'aux cellules de dimension zéro par réunion. Les applications presque parfaites sont en revanche beaucoup plus faciles à construire une fois les cellules primitives sont connues et elles présentent un avantage au point de vue algorithmique en n'exigeant la convexité que sur les cellules primitives.

Cependant, la relation entre les deux est étroite. En effet, à toute application parfaite $F : X \longrightarrow \mathcal{R}$, on peut associer une application presque parfaite $G : X \longrightarrow \mathcal{R}$ qui est une sélection de F et qui est définie pour toute cellule $e \in \mathcal{E}(X)$ par

$$G(e) = \cup \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \quad \sigma \text{ primitive dans } X\} \subset F(e).$$

La démonstration est triviale si on remarque que pour toute cellule primitive σ , $G(\sigma) = F(\sigma)$. De plus, comme

$$\cap \{G(e) : v \leq e, \quad e \text{ primitive dans } X\} = \cap \{F(e) : v \leq e, \quad e \text{ primitive dans } X\},$$

il s'en suit que $\mathcal{A}_G(v) \supset \mathcal{A}_F(v) \neq \emptyset$.

Réciproquement, si $F : X \longrightarrow \mathcal{R}$ est une application presque parfaite, alors l'application $G : X \longrightarrow \mathcal{R}$ définie pour tout sommet $v \in \mathcal{E}^0(X)$ par la formule $G(v) = \text{co}_{\mathcal{E}}(F(v))$ et étendue de façon naturelle à tout $x \in X$ par

$$G(x) = G(\sigma) = \cap \{G(v) : v \leq \sigma, \quad v \in \mathcal{E}^0(X)\},$$

où σ est l'unique cellule de $\mathcal{E}(X)$ contenant x , est une application parfaite dont F est une sélection. Il est en effet aisé de vérifier que pour tout $\sigma \in \mathcal{E}(X)$,

$$G(\sigma) = \cap \{G(v) : v \leq \sigma, \quad v \in \mathcal{E}^0(X)\} \supset \cap \{F(v) : v \leq \sigma, \quad v \in \mathcal{E}^0(X)\} \supset F(\sigma).$$

D'où $\mathcal{A}_G(v) \supset \mathcal{A}_F(v) \neq \emptyset$.

Définition 2.6 Soit $X \in \mathcal{R}$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application univoque continue. Une représentation parfaite (respectivement presque parfaite) de f est par définition toute application parfaite (respectivement presque parfaite) $F : X \longrightarrow \mathcal{R}$ telle que $f(x) \in F(x)$ pour tout $x \in X$.

Pour construire une représentation parfaite (respectivement presque parfaite) de f , il est suffisant de connaître l'information numérique suivante:

1. Un nombre suffisant d'approximations de f en un nombre important mais fini de points de X : les sommets dans $\mathcal{E}^0(X)$ pour une application parfaite, et les points intérieurs (par exemple, points du milieu) des cellules primitives dans X pour une application presque parfaite.
2. Le module de continuité uniforme de f dans X , i.e. la fonction $\varepsilon \longrightarrow \delta_\varepsilon$ telle que

$$\|x - y\| < \delta_\varepsilon \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

pour tout $x, y \in X$.

De plus, en prenant des grilles suffisamment fines, on peut obtenir des représentations dont les valeurs sont de diamètres arbitrairement petits.

Plus concrètement, si nous considérons dans la suite les grilles cubiques \mathcal{E}_k de pas $\frac{1}{k}$ comme définies dans l'Exemple 2.2, nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.1 Soient $X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f admet des représentations (parfaite et presque parfaite) relativement à \mathcal{E}_k dont les valeurs sont dans un voisinage quelconque de Y .

Preuve. En effet, munissons \mathbb{R}^n de la norme $\|x\| = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$ de telle sorte que les boules

$$B_r(x) = \{y : \|y - x\| < r\}$$

soient des cubes n -dimensionnels. Puisque f est continue et X est compact, f est uniformément continue. Soit alors $\varepsilon \rightarrow \delta_\varepsilon$ le module de continuité uniforme de la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ par rapport à la norme précédente.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} < \min\{\delta_\varepsilon, \varepsilon\}$. Soit x_σ le centre de la cellule primitive $\sigma \in \mathcal{E}_k(X)$. Pour tout $x \in \sigma$, définissons $F(x) = F(\sigma)$ comme étant le plus petit rectangle \mathcal{E}_k -représentable qui contienne la boule $B_\varepsilon(f(x_\sigma))$. On peut établir clairement que $F(\sigma)$ est donné par la formule

$$F(\sigma) = \bigcup \left\{ \bar{e} : e \in \mathcal{E}_k \text{ et } \bar{e} \cap \overline{B_\varepsilon(f(x_\sigma))} \neq \emptyset \right\}.$$

Pour obtenir une représentation presque parfaite de f , on définit F sur d'autres cellules e de \mathcal{E}_k par la formule

$$F(e) = \bigcup \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\}.$$

De l'inégalité

$$\|f(x) - f(x_\sigma)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \bar{\sigma},$$

on déduit aisément que $f(x) \in F(\sigma)$ pour tout $x \in \bar{\sigma}$, en particulier si v est un sommet de σ alors $f(v) \in F(\sigma)$. Il en résulte que

$$\mathcal{A}_F(v) = \bigcap \{F(\sigma) : v \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\} \supset \{f(v)\},$$

ce qui montre que F est une application presque parfaite.

Soient $x \in X$ et e l'unique cellule de \mathcal{E}_k contenant x . Il existe une cellule primitive σ telle que $e \leq \sigma$. D'où $x \in \bar{\sigma}$ et donc $f(x) \in F(\sigma) \subset F(e) = F(x)$. Il s'en suit que f est

une sélection de F . Soient $Q \in \mathcal{E}_k(X)$ et $y \in F(Q)$. Il existe alors une cellule primitive σ telle que $Q \leq \sigma$ et $y \in F(\sigma)$. Par définition, on peut trouver une cellule $e \in \mathcal{E}_k$ telle que $y \in \bar{e}$ et $\bar{e} \cap \overline{B_\varepsilon(f(x_\sigma))} \neq \emptyset$. Il en résulte que $\|y - f(x_\sigma)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{k}$, i.e.

$$y \in \overline{B_{\varepsilon + \frac{1}{k}}(Y)}.$$

Pour obtenir une représentation parfaite F de f , on définit d'abord F sur tout sommet v de X par

$$F(v) := \bigcup \left\{ \bar{e} : e \in \mathcal{E}_k \text{ et } \bar{e} \cap \overline{B_\varepsilon(f(v))} \neq \emptyset \right\},$$

et on pose ensuite, pour toute cellule σ , $F(\sigma) = \bigcap \{F(v) : v \leq \sigma, v \text{ sommet}\}$. Il est aisé de voir que $F(\sigma) \neq \emptyset$ puisque $f(x_\sigma) \in F(v) \quad \forall v \text{ sommet de } \sigma$, où x_σ désigne le centre de la cellule σ . De plus, on peut constater que pour tout sommet v

$$f(v) \in \mathcal{A}_F(v) = \bigcap \{F(\sigma) : v \leq \sigma\},$$

ce qui prouve que F est une application parfaite.

Soient $x \in X$ et σ l'unique cellule de \mathcal{E}_k qui contient x . On a alors

$$\|f(x) - f(v)\| \leq \varepsilon \quad \forall v \leq \sigma, \quad v \text{ sommet}.$$

D'où $f(x) \in F(\sigma) = F(x)$. Ceci démontre bien que f est une sélection de F . On peut démontrer de façon similaire que précédemment que pour toute cellule $Q \in \mathcal{E}_k(X)$ et tout $y \in F(Q)$, on a $y \in \overline{B_{\varepsilon + \frac{1}{k}}(Y)}$. \square

Remarque 2.3 Nous avons, grâce au théorème précédent, obtenu un procédé pour la construction d'une représentation parfaite ou presque parfaite pour une application continue donnée dont le domaine est représentable. Nous voulons faire remarquer qu'à partir de la représentation parfaite F obtenue dans le théorème précédent pour une fonction

continue f , on peut en construire une représentation presque parfaite G dont les images sont de moindre diamètres en utilisant la discussion qui suit la preuve du Lemme 2.1. Il suffit pour cela de vérifier que f est une sélection de G . Rappelons que G est donnée sur toute cellule e par la formule

$$G(e) = \cup \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\}.$$

Soient $x \in X$ et e l'unique cellule contenant x . Il existe une cellule primitive σ telle que $e \leq \sigma$. D'où $x \in \bar{\sigma}$ et donc $\|f(x) - f(v)\| \leq \varepsilon$ pour tout v sommet de σ . Il s'en suit alors que $f(x) \in F(\sigma) \subset G(e) = G(x)$, ce qui montre bien que f est une sélection de G .

2.3 Application de chaîne associée à une application représentable

Soit \mathcal{E} une grille convexe dans \mathbb{R}^n . Pour $X \in \mathcal{R}$, on dénote par $C_q(X) = C_q(X, \mathcal{E})$ le q -ième groupe du complexe de chaîne $C(X, \mathcal{E})$ engendré par $\mathcal{E}^q(X)$ (voir Section 2.1.1). Pour $\sigma = \sum_i c_i e_i \in C_q(X)$, on dénote par $|\sigma| = \cup \{e_i : c_i \neq 0\}$ le *support* de σ .

Le résultat principal de ce chapitre fait l'objet du théorème suivant:

Théorème 2.2 *Soit \mathcal{E} une grille convexe dans \mathbb{R}^n , X, Y des ensembles représentables relativement à \mathcal{E} et $F : X \rightarrow \mathcal{R}(Y)$ une application parfaite (respectivement presque parfaite) relativement à $\mathcal{E}(X)$. Alors, il existe une application de chaîne $\varphi : C(X) \rightarrow C(Y)$ telle que*

$$|\varphi_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^q(X).$$

Preuve. Par induction, on construit $\varphi_q : C_q(X) \longrightarrow C_q(Y)$ telle que

$$|\varphi_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma) = \cap \{F(\gamma) : \sigma \leq \gamma, \gamma \in \mathcal{E}(X)\} \quad \forall \sigma \in C_q(X) \quad (2.2)$$

On définira les valeurs de φ_q sur les générateurs.

Pour $q = 0$ et $q = 1$:

Soit v un sommet. Puisque $\mathcal{A}_F(v)$ est un ensemble fermé et non vide, on peut choisir un sommet $\varphi_0(v) \in \mathcal{A}_F(v)$.

Pour une cellule $\sigma \in \mathcal{E}^1(X)$ telle que $\partial_1 \sigma = v_1 - v_0$, on pose

$$z = \varphi_0(\partial_1 \sigma) = \varphi_0(v_1) - \varphi_0(v_0).$$

On peut facilement voir que $|z| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$.

Soit $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction augmentation pour $C_0(X)$. Puisque φ_0 préserve l'augmentation, il s'en suit que $\varepsilon(z) = 0$. Notons que $\mathcal{A}_F(\sigma)$ est un ensemble convexe, donc $\tilde{H}_0(\mathcal{A}_F(\sigma))$ est un groupe trivial. Il existe donc une chaîne $c \in C_1(\mathcal{A}_F(\sigma))$ telle que $\partial_1 c = z$. Nous définissons alors

$$\varphi_1 \sigma := c.$$

La condition 2.2 est automatiquement satisfaite et l'opérateur de bord ∂ satisfait par définition

$$\varphi_0 \partial_1(\sigma) = \partial_1 \varphi_1(\sigma).$$

Supposons maintenant que φ_i est construite pour $0 \leq i < q$ où $\varphi_i : C_i(X) \longrightarrow C_i(Y)$ et satisfait les conditions

$$1. \quad |\varphi_i \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^i(X).$$

$$2. \varphi_{i-1} \partial = \partial \varphi_i \quad \text{for } 1 \leq i \leq q-1.$$

Construction de φ_q :

Soit $\sigma \in \mathcal{E}^q(X)$. La frontière de σ peut s'exprimer

$$\partial \sigma = \sum_s c_s \sigma_s,$$

où $\sigma_s \in \mathcal{E}^{q-1}(X) \quad \forall s$.

Nous avons

$$|\varphi_{q-1} \sigma_s| \subset \mathcal{A}_F(\sigma_s) \subset \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall s.$$

D'où,

$$|\varphi_{q-1} \partial \sigma| \subset \mathcal{A}(\sigma).$$

Puisque $\mathcal{A}_F(\sigma)$ est convexe (donc $\tilde{H}(\mathcal{A}_F(\sigma)) = 0$) et $\varphi_{q-1} \partial \sigma$ est un cycle (par hypothèse d'induction), il existe une chaîne $c \in C_q(\mathcal{A}(\sigma))$ telle que $\partial c = \varphi_{q-1} \partial \sigma$. On pose alors

$$\varphi_q \sigma := c.$$

Par définition, φ_q satisfait les conditions suivantes

1. $\partial \varphi_q = \varphi_{q-1} \partial$.
2. Si $\sigma \in \mathcal{E}^q(X)$, alors $\varphi_q \sigma \in C_q(\mathcal{A}_F(\sigma))$ et $|\varphi_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$. □

Définition 2.7 *Toute application de chaîne $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ satisfaisant la condition 2.2 est appelée une \mathcal{E} -application de chaîne associée à F .*

Pour toute application de chaîne $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$, nous dénotons par

$$\varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y),$$

l'homomorphisme quotient induit par φ au niveau des groupes d'homologie.

Définition 2.8 Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{R}(Y)$ une application parfaite ou presque parfaite et $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ une \mathcal{E} -application de chaîne associée à F . L'homomorphisme induit dans l'homologie par F est défini par la formule

$$F_* := \varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y).$$

Le résultat suivant établira que l'homomorphisme $F_* = \varphi_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ tel que défini précédemment est indépendant du choix de l'application de chaîne associée à F donnée par le Théorème 2.2.

Théorème 2.3 Supposons que φ et ψ sont deux \mathcal{E} -applications de chaîne associées à la même application parfaite (respectivement presque parfaite) F . Alors φ et ψ sont homotopes par une homotopie de chaîne D .

Preuve. On construit par induction sur q une application de chaîne

$$D_q : C_q(X) \longrightarrow C_{q+1}(Y)$$

telle que

$$|D_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma) = \cap \{F(\gamma) : \sigma \leq \gamma, \gamma \in \mathcal{E}(X)\} \quad \forall \sigma \in C_q(X). \quad (2.3)$$

Il est bien entendu suffisant de définir D_q sur les générateurs.

Pour $q = 0$:

Soient v un sommet de $\mathcal{E}(X)$ et $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction augmentation pour $C_0(X)$.

Posons $z = \varphi_0(v) - \psi_0(v)$.

Puisque φ_0 et ψ_0 préservent l'augmentation, il suit que $\varepsilon(z) = 0$. Notons que $\mathcal{A}_F(\sigma)$ est un ensemble convexe, donc $\tilde{H}_0(\mathcal{A}_F(\sigma)) = 0$. Il existe donc une chaîne $c_1 \in C_1(\mathcal{A}_F(v))$ telle que

$$\partial c_1 = \varphi_0(v) - \psi_0(v).$$

Nous définissons alors $D_0 v := c_1$.

On peut constater sans difficulté que l'homomorphisme $D_0 : C_0(X) \longrightarrow C_1(Y)$ est bien défini et satisfait les propriétés suivantes

1. $|D_0 v| \subset \mathcal{A}_F(v) \quad \forall v \in \mathcal{E}^0(X)$.
2. $\partial_1 D_0 = \varphi_0 - \psi_0$.

Supposons maintenant que D_i est construite pour $0 \leq i < q$ où $D_i : C_i(X) \longrightarrow C_{i+1}(Y)$ et satisfait les conditions

1. $|D_i \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^i(X)$.
2. $\partial_{i+1} D_i + D_{i-1} \partial_i = \varphi_i - \psi_i \quad \text{for } 0 \leq i \leq q-1$.

Construction de D_q :

Soit $\sigma \in \mathcal{E}^q(X)$. On peut écrire

$$\partial \sigma = \sum_s c_s \sigma_s,$$

où $\sigma_s \in \mathcal{E}^{q-1}(X) \quad \forall s$. Posons

$$\alpha = \varphi_q \sigma - \psi_q \sigma - D_{q-1} \partial \sigma.$$

Nous avons $|\varphi_q \sigma| \cup |\psi_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$ et $|D_{q-1} \sigma_s| \subset \mathcal{A}_F(\sigma_s) \subset \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall s$. D'où $|D_{q-1} \partial \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$ et par conséquent $|\alpha| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$. Il suit que α est un cycle. En effet, on a

$$\partial_q \alpha = \partial_q \varphi_q \sigma - \partial_q \psi_q \sigma - \partial_q D_{q-1} \partial \sigma = \varphi_{q-1} \partial_q \sigma - \psi_{q-1} \partial_q \sigma - \partial_q D_{q-1} \partial \sigma.$$

Puisque par les hypothèses d'induction,

$$\varphi_{q-1} \partial_q \sigma - \psi_{q-1} \partial_q \sigma = \partial_q D_{q-1} \partial_q \sigma + D_{q-2} \partial_{q-1} \partial_q \sigma,$$

nous déduisons que $\partial_q \alpha = 0$.

Comme $\mathcal{A}_F(\sigma)$ est convexe et α est un cycle, il existe une $(q+1)$ -chaîne $c_{q+1} \in C_{q+1}(\mathcal{A}_F(\sigma))$ telle que $\partial_{q+1} c_{q+1} = \alpha$.

On définit alors

$$D_q \sigma := c_{q+1}.$$

Par définition, D_q satisfait les propriétés suivantes

1. $|D_q \sigma| \subset \mathcal{A}_F(\sigma)$.
2. $\partial_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = \varphi_q - \psi_q$. □

Nous allons terminer cette section en vérifiant que si deux applications multivoques F et G sont deux représentations (parfaites ou presque parfaites) d'une même application continue f , alors elles induisent le même homomorphisme dans l'homologie. Cela justifiera la définition de l'homomorphisme f_* induit dans l'homologie par f qu'on verra au chapitre suivant.

Proposition 2.4 *Soient F une application parfaite ou presque parfaite et G une application parfaite ou presque parfaite relativement à la même grille $\mathcal{E}(X)$ telles que $G(X) \subset F(X)$ pour tout $x \in X$, i.e. G est une sélection de F . Alors, toute \mathcal{E} -application de chaîne associée à G est aussi une \mathcal{E} -application de chaîne associée à F . Il s'en suit que $G_* = F_*$.*

Preuve. Si φ est une \mathcal{E} -application de chaîne associée à G , alors elle satisfait la propriété

$$|\varphi_q e| \subset \cap \{G(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \in \mathcal{E}(X)\} \subset \cap \{F(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \in \mathcal{E}(X)\} \quad \forall e \in \mathcal{E}^q(X).$$

D'où, φ est une \mathcal{E} -application de chaîne associée à F . \square

Corollaire 2.1 Soient $X \in \mathcal{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et F et G deux représentations de f . Alors $F_* = G_*$.

Preuve. Si F et G sont deux représentations parfaites de f , on vérifie facilement que l'application multivoque H définie par

$$H(\sigma) = F(\sigma) \cap G(\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(X)$$

est aussi une représentation parfaite de f . On déduit alors de la proposition précédente que $H_* = F_* = G_*$.

Dans le cas où F et G sont deux représentations presque parfaites de f , l'application multivoque H définie par

$$H(\sigma) = F(\sigma) \cap G(\sigma), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(X), \quad \sigma \text{ primitive dans } X$$

et étendue ensuite aux autres cellules $e \in \mathcal{E}(X)$ grâce à la formule

$$H(e) = \cup \{H(\sigma) : e \leq \sigma, \sigma \text{ primitive dans } X\}$$

est une représentation presque parfaite de f . En effet, on peut d'abord remarquer que par définition H est presque parfaite. Soit alors $x \in X$, $e \in \mathcal{E}(X)$ l'unique cellule dans X qui contient x et σ une cellule primitive telle que $e \leq \sigma$. On a

$$f(e) \subset f(\bar{\sigma}) \subset \overline{f(\sigma)} \subset \overline{F(\sigma)} \subset F(\sigma) \subset F(e).$$

Or $F(e) = F(x)$, $\forall x \in e$. D'où $f(x) \in F(x)$.

Si F est une représentation parfaite de f et G une représentation presque parfaite de f , on sait (voir la discussion suivant la preuve du Théorème 2.1) que f admet une représentation presque parfaite F_1 qui est une sélection de l'application multivoque F . On revient donc au cas où f admet deux représentations presque parfaites. \square

2.4 Applications représentables et subdivisions

Nous avons introduit indirectement la notion de subdivision pour le cas des grilles cubiques lors du Théorème 2.1. Nous avons en effet considéré la grille \mathcal{E}_k de pas $\frac{1}{k}$ qui s'obtient clairement en subdivisant la grille de base \mathcal{E}_1 . Nous allons maintenant définir de façon générale la notion de sous-grille et obtenir un résultat, qui jumelé à la Proposition 2.4, permet de définir pour une application continue donnée des représentations dont les valeurs sont de diamètres arbitrairement petits à partir d'une de ses représentations relativement à la grille de départ. De plus, nous allons voir que ces représentations induisent le même homomorphisme dans l'homologie au sens de la Définition 2.8, ce qui prouve alors que cette même définition est indépendante de la subdivision opérée sur la grille de départ.

Définition 2.9 Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux grilles convexes dans \mathbb{R}^n . On dit que \mathcal{E}' est une sous-grille (ou subdivision) de la grille \mathcal{E} si toute cellule de \mathcal{E} s'écrit comme réunion finie de cellules de \mathcal{E}' .

Proposition 2.5 Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux grilles convexes telles que \mathcal{E}' est une sous-grille

de \mathcal{E} . On a les propriétés suivantes:

1. $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{R}_{\mathcal{E}'}$.
2. Toute cellule e de \mathcal{E}' est contenue dans une unique cellule σ de \mathcal{E} .

Preuve. La propriété 1 découle immédiatement de la définition d'une sous-grille. Pour $e \in \mathcal{E}'$, posons

$$A_e = \{\sigma \in \mathcal{E} : e \cap \sigma \neq \emptyset\}.$$

Il est clair que $A_e \neq \emptyset$ puisque $e \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}} \sigma$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in A_e$. Par définition, on peut écrire $\sigma_1 = \bigcup_{e' \in I} e'$, où I est un sous-ensemble fini de \mathcal{E}' . Il suit que e intersecte au moins une des cellules e' de I et donc $e \in I$ et alors $e \subset \sigma_1$. En raisonnant de la même façon, on déduit que $e \subset \sigma_2$. On déduit de la définition d'une grille que $\sigma_1 = \sigma_2$.

L'ensemble A_e est donc un singleton. \square

On déduit notamment de ce qui précède que toute cellule $\sigma \in \mathcal{E}$ peut s'écrire comme une réunion finie de cellules de \mathcal{E}' selon la formule

$$\sigma = \bigcup \{e \in \mathcal{E}' : e \subset \sigma\}.$$

Remarque 2.4 Dans le cas des grilles cubiques, il est évident que la grille cubique $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_m$ de pas $\frac{1}{m}$ est une sous-grille de la grille cubique $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$ de pas $\frac{1}{k}$ si et seulement si k divise m .

Théorème 2.4 Soient \mathcal{E}' une sous-grille de la grille \mathcal{E} , $X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application parfaite relativement à $\mathcal{E}(X)$. Alors F est une application parfaite relativement à $\mathcal{E}'(X)$ et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ induit le même homomorphisme dans l'homologie considérée comme une application parfaite relativement à \mathcal{E}' .

Avant de prouver le théorème précédent, on doit d'abord prouver les lemmes suivants:

Lemme 2.2 *Soit v un sommet de la sous-grille \mathcal{E}' de \mathcal{E} et F une application parfaite relativement à \mathcal{E} . Il existe une cellule $\sigma \in \mathcal{E}$ telle que*

$$\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v) = \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}}(\sigma).$$

Preuve. D'après la Proposition 2.5, il existe une unique cellule σ de \mathcal{E} telle que $v \in \sigma$. Il suit que toute cellule $e \in \mathcal{E}'$ telle que $v \leq e$ intersecte σ et donc $e \subset \sigma$. D'où $F(e) = F(\sigma)$ et donc $\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v) \subset \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}}(\sigma)$.

Soit maintenant $\gamma \in \mathcal{E}$ telle que $\sigma \leq \gamma$. Il est aisé de voir que

$$\bar{\gamma} \subset \cup \{\bar{e}, e \in \mathcal{E}' : e \subset \gamma\}.$$

Comme $v \in \bar{\gamma}$, il suit qu'il existe $e \in \mathcal{E}'$ telle que $e \subset \gamma$ et $v \leq e$. D'où $F(e) = F(\gamma)$ et donc $\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}}(\sigma) \subset \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v)$. \square

Lemme 2.3 *Si F est représentable relativement à \mathcal{E} alors F est également représentable relativement à \mathcal{E}' .*

Preuve. Puisque $\text{dom } F \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ et $\forall x \in \text{dom } F, F(x) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ et toute cellule de \mathcal{E} est une réunion finie des cellules de \mathcal{E}' , on peut déduire que $\text{dom } F \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}'}$ et $F(x) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}'} \quad \forall x$. L'égalité $G(F) = \overline{G(F)}$ est évidente. Soit $e' \in \mathcal{E}'$. Il existe $e \in \mathcal{E}$ telle que $e' \subset e$. Puisque $F(x) = F(y) \quad \forall x, y \in e$, la relation $F(x) = F(y)$ reste vérifiée pour tout $x, y \in e'$. Il en découle que F est représentable relativement à \mathcal{E}' . \square

Lemme 2.4 *Si F est parfaite relativement à \mathcal{E} alors F est aussi parfaite relativement à \mathcal{E}' .*

Preuve. Il est évidemment clair que $F(x)$ est convexe et fermée pour tout $x \in \text{dom } F$.

Pour $e' \in \mathcal{E}'$, on peut aisément constater que

$$F(e') = \cap \{F(v) : v \leq e', v \in (\mathcal{E}')^0\}.$$

On peut d'abord voir que l'inclusion

$$F(e') \subset \cap \{F(v) : v \leq e', v \in (\mathcal{E}')^0\}$$

est trivialement satisfaite puisque F est représentable relativement à \mathcal{E}' . Pour prouver les autres inclusions, nous distinguerons les deux cas suivants:

1. Ou bien il existe $v_0 \leq e'$ et $e \in \mathcal{E}$ telle que $v_0 \in \text{int}(e)$ et $e' \subset e$. Il s'en suit que

$$\cap \{F(v) : v \leq e', v \in (\mathcal{E}')^0\} \subset F(v_0) = F(e) = F(e').$$

2. Si non, $e' \in \mathcal{E}$ et tout sommet de e' est un sommet de la grille originale \mathcal{E} . L'égalité précédente suit alors immédiatement.

Soit $v \in (\mathcal{E}')^0$. Par le Lemme 2.2, il existe une cellule $\sigma \in \mathcal{E}$ telle que $v \in \sigma$. On a alors

$$\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v) = \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}}(\sigma) \neq \emptyset.$$

Ceci démontre donc que F est une application parfaite relativement à \mathcal{E}' . \square

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux grilles convexes dans \mathbb{R}^n telle que \mathcal{E}' est une sous-grille de \mathcal{E} . Pour tout $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, nous définissons l'opérateur de subdivision

$$\mu_{\mathcal{E}, \mathcal{E}'} = \mu : C(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C(X, \mathcal{E}')$$

sur les générateurs de la manière suivante:

1. $\mu_0 : C_0(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C_0(X, \mathcal{E}')$ est l'inclusion canonique, i.e. $\mu_0(v) = v$, $\forall v \in \mathcal{E}^0(X)$, puisque tout sommet de \mathcal{E} est aussi un sommet de \mathcal{E}' .

2. De façon générale, pour toute p -cellule $\sigma \in \mathcal{E}^p(X)$,

$$\mu_p(\sigma) = \sum_{e \in (\mathcal{E}')^p(\sigma)} e, \quad (2.4)$$

Il est facilement vérifiable que μ est une application de chaîne.

Preuve du Théorème 2.4. On a déjà démontré que F est parfaite relativement à \mathcal{E}' . Soient alors $\varphi : C(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C(Y, \mathcal{E})$ une \mathcal{E} -application de chaîne associée à F vue comme application parfaite relativement à \mathcal{E} et $\psi : C(X, \mathcal{E}') \longrightarrow C(Y, \mathcal{E}')$ une \mathcal{E}' -application de chaîne associée à F vue comme application parfaite relativement à \mathcal{E}' . On alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\varphi} & C(Y, \mathcal{E}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ C(X, \mathcal{E}') & \xrightarrow{\psi} & C(Y, \mathcal{E}'). \end{array}$$

Nous construisons par induction sur q une homotopie de chaîne

$$D = \{D_q : C_q(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C_{q+1}(Y, \mathcal{E}')\}_{q \in \mathbb{N}}$$

entre l'application de chaîne $\mu \circ \varphi : C(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C(Y, \mathcal{E}')$ et l'application de chaîne $\psi \circ \mu : C(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C(Y, \mathcal{E}')$ en précisant ses valeurs sur les générateurs. Il s'en suivra que

$$\mu_* \varphi_* = \psi_* \mu_*. \quad (2.5)$$

Soit $v \in \mathcal{E}^0(X)$. Il est clair, grâce au Lemme 2.2, que $\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v) = \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v)$ et par définition, on a $\varphi_0(v) \in \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v)$ et $\psi_0(v) \in \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v)$. Il est clair par ailleurs que $\mu_0(v) = v$ et $\mu_0(\varphi_0(v)) = \varphi_0(v)$. Soit $\varepsilon : C_0(X, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction augmentation pour $C_0(X, \mathcal{E})$. Il suit alors que $z = \mu_0 \circ \varphi_0(v) - \psi_0 \circ \mu_0(v) \in C_0(\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v))$ est un cycle réduit, i.e. $\varepsilon(z) = 0$.

Puisque $\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v)$ est un ensemble convexe, on a $\tilde{H}_0(\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v)) = 0$. Il existe donc une 1-chaîne $c_1 \in C_1(\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v))$ telle que $\partial_1 c_1 = z$. Définissons alors $D_0(v) := c_1$.

L'homomorphisme D_0 satisfait les propriétés

1. $|D_0(v)| \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(v) = \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(v)$.
2. $\partial_1 D_0(v) = \partial_1 c_1 = \mu_0 \circ \varphi_0(v) - \psi_0 \circ \mu_0(v)$.

Supposons que pour $0 \leq i \leq q-1$ on a l'existence d'une application de chaîne

$$D_i : C_i(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C_{i+1}(Y, \mathcal{E}')$$

telle que

1. $|D_i(\sigma)| \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$,
2. $\partial_{i+1} D_i(\sigma) + D_{i-1} \partial_i(\sigma) = \mu_i \circ \varphi_i(\sigma) - \psi_i \circ \mu_i(\sigma)$.

Soit $\sigma \in \mathcal{E}^q(X)$. On sait que $\mu_q(\sigma) = \sum_{e \in (\mathcal{E}')^q(\sigma)} e$. Considérons alors la chaîne

$$\alpha = \mu_q \circ \varphi_q(\sigma) - \psi_q \circ \mu_q(\sigma) - D_{q-1} \partial_q(\sigma).$$

On peut facilement voir que

$$|\psi_q(e)| \subset \mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(e) \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma), \quad \forall e \in (\mathcal{E}')^q(\sigma).$$

En effet, si $e \in (\mathcal{E}')^q(\sigma)$ et $\beta \in \mathcal{E}'$ telle que $e \leq \beta$, il existera $\gamma \in \mathcal{E}$, telle que $\beta \subset \gamma$.

Il suit immédiatement que $e \subset \bar{\gamma}$ et alors $\sigma \cap \bar{\gamma} \neq \emptyset$. D'où $\sigma \leq \gamma$. Ceci montre donc

que $\mathcal{A}_F^{\mathcal{E}'}(e) \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$ alors que la première inclusion découle de la définition de ψ . Par

ailleurs, par définition de φ et μ , on a $|\mu_q \circ \varphi_q(\sigma)| \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$.

Puisque $\partial_q \sigma = \sum_i \sigma_i$, avec $\sigma_i \in \mathcal{E}^{(q-1)}(X)$ et $\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma_i) \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$, on déduit grâce aux hypothèses d'induction que $D_{q-1}(\partial_q \sigma) \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$. Il suit alors que $|\alpha| \subset \mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$. Il est

maintenant aisé de voir que α est un cycle dans $C_q(\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma))$. L'ensemble $\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma)$ est convexe (donc acyclique). En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve du Théorème 2.3, on déduit qu'il existe une $(q+1)$ -chaîne $c_{q+1} \in C_{q+1}(\mathcal{A}_F^\mathcal{E}(\sigma))$ telle que $\partial_{q+1} c_{q+1} = \alpha$. Nous définissons alors $D_q(\sigma) := c_{q+1}$.

On peut vérifier sans peine que l'homomorphisme $D_q : C_q(X, \mathcal{E}) \longrightarrow C_{q+1}(Y, \mathcal{E}')$ satisfait toutes les hypothèses d'induction. \square

Il est bien connu dans la littérature que l'opérateur de subdivision μ induit un isomorphisme μ_* au niveau des groupes d'homologie. On peut trouver des démonstrations complètes de ce fait dans MASSEY[18] pour le cas des subdivision barycentriques pour l'homologie simpliciale et dans KACZYNSKI et al.[16] et à la fin du Chapitre 3 de ce présent ouvrage pour les cas de l'homologie cubique. On déduit alors à partir de la formule 2.5 que la définition de l'homomorphisme

$$F_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$$

est invariante par rapport à la subdivision pour toute application parfaite

$$F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y).$$

Remarque 2.5 *Les résultats précédents s'étendent de façon naturelle pour les applications presque parfaites avec de très légères modifications des arguments employés dans leurs démonstrations respectives.*

En combinant la Proposition 2.4 et le Théorème 2.4, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2.2 *Si F est une application parfaite (respectivement presque parfaite) relativement à la grille \mathcal{E} et si G est une sélection de F , i.e. $G(x) \subset F(x) \quad \forall x$, et également*

une application parfaite (respectivement presque parfaite) relativement à la sous grille \mathcal{E}' de \mathcal{E} , alors G et F induisent le même homomorphisme dans l'homologie.

L'idée derrière la notion de subdivision est la construction de représentations dont les images sont circonscrites dans un certain voisinage. Le corollaire précédent nous assure que ces représentations induisent le même homomorphisme dans l'homologie. Ce résultat va s'avérer d'une importance capitale lors de la définition de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une fonction continue donnée à la fin du Chapitre 3.

Chapitre 3

Homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue

Dans le cadre du chapitre 2, nous avons associé à toute application parfaite ou presque parfaite $F : X \longrightarrow Y$, où $X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$, une application de chaîne $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ donnée explicitement par le Théorème 2.2. Nous avons alors défini (voir Définition 2.8) l'homomorphisme F_* induit par F dans l'homologie comme étant l'homomorphisme de groupes quotients induit par φ au niveau des groupes d'homologie, i.e.

$$F_* = \varphi_* : H(X) \longrightarrow H(Y).$$

Dans ce chapitre, nous commençons par prouver que cette définition de F_* coïncide avec les définitions classiques des homomorphismes induits dans l'homologie par les applications univoques et multivoques. Nous allons ensuite définir l'homomorphisme f_* induit dans l'homologie par une application continue $f : X \longrightarrow Y$ via une quelconque de ses

représentations F . Dans un premier temps, nous allons imposer la condition $F(X) \subset Y$. Il est clair qu'il n'est pas toujours possible de pouvoir construire une représentation F de f vérifiant la condition $F(X) \subset Y$. De façon générale, une représentation de f est une application parfaite ou presque parfaite $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dont l'image n'est pas nécessairement dans Y . Il est cependant démontré dans le Théorème 2.1 qu'en passant à une subdivision raisonnable de la grille de départ, on peut construire une représentation cubique F de f dont l'image est contenue dans un voisinage arbitraire de Y . Nous utilisons ce fait dans la Section 3.2 pour faire la construction de l'homomorphisme f_* dans le cas général, c'est-à-dire même si la condition $F(X) \subset Y$ n'est pas satisfaite.

3.1 Grille produit et Théorème de Vietoris-Begle

On peut généraliser, sans changement majeur, toutes les définitions concernant les applications représentables $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ au cas où X et Y sont deux ensembles représentables relativement à deux grilles convexes distinctes \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 dans \mathbb{R}^n respectivement.

Définition 3.1 Soient \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 des grilles convexes dans \mathbb{R}^n et $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$, $Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_2}$. Alors,

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 := \{e_1 \times e_2 : e_1 \in \mathcal{E}_1, e_2 \in \mathcal{E}_2\}$$

est une grille convexe dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ appelée la grille produit de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Le sous-ensemble

$$(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)^n(X \times Y) := \{e_1 \times e_2 : e_1 \in \mathcal{E}_1(X), e_2 \in \mathcal{E}_2(Y), \dim e_1 + \dim e_2 = n\}$$

est la base du n -ième groupe $C_n(X \times Y)$ du complexe de chaîne $C(X \times Y)$. (Voir DOLD[7], Chapitre V).

Nous pouvons alors caractériser les applications représentables de X dans Y de la manière suivante:

Proposition 3.1 *Soient $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$ et $Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_2}$. L'application $F : X \longrightarrow Y$ est représentable si et seulement si son graphe $G(F)$ est un ensemble représentable relativement à la grille convexe produit $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.*

Preuve. En effet, si F est représentable relativement à \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , son domaine $\text{dom } F$ est un ensemble représentable relativement à \mathcal{E}_1 , i.e. $\text{dom } F = \bigcup_{i \in I} e_i$, où I est un ensemble fini d'indices. Il suit alors que, $G(F) = \bigcup_{i \in I} (e_i \times F(e_i))$. Sachant que chaque $F(e_i)$ est représentable relativement à \mathcal{E}_2 , on peut écrire

$$F(e_i) = \bigcup_{j \in J_i} e'_j \quad \forall i \in I,$$

où J_i est un ensemble fini d'indices. Il s'en suit que

$$G(F) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (e_i \times e'_j), \quad (3.1)$$

où $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ est un ensemble fini d'indices. Ce qui montre que $G(F)$ est représentable relativement à $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

Si $G(F) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2}$ alors $G(F)$ satisfait l'égalité (3.1). Il suit immédiatement que $G(F)$ est fermé et $\text{dom } F = \bigcup_{i \in I} e_i$ est un ensemble représentable relativement à \mathcal{E}_1 . Posons, pour tout $i \in I$

$$J_i = \{j \in J : e_i \times e'_j \subset G(F)\}.$$

Soient $i \in I$ et $x \in e_i$. On remarque que pour tout $j \in J_i$ et pour tout $y \in e'_j$, $(x, y) \in G(F)$. D'où

$$F(x) = \{y : (x, y) \in G(F)\} = \bigcup_{j \in J_i} e'_j.$$

Il suit que $F(x)$ est représentable relativement à \mathcal{E}_2 et $F(u) = F(x) \quad \forall u \in e_i$. On conclut alors que F est une application représentable. \square

Nous allons maintenant énoncer la définition classique de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application multivoque *acyclique* qui est obtenue grâce au Théorème de Vietoris-Begle.

Soient X et Y deux espaces topologiques de Hausdorff localement compacts. Dans la suite, le symbole \check{H} dénotera le foncteur de l'homologie de Čech à coefficients dans un corps.

Définition 3.2 Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application multivoque semi-continue supérieurement. F est dite *acyclique* si $\check{H}(F(x)) = 0$, $\forall x \in X$, où \check{H} désigne l'homologie réduite.

Définition 3.3 Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On rappelle (voir SIEGBERG et SKORDEV[28]) que f est appelée une *application de Vietoris* si les conditions suivantes sont satisfaites

1. f est surjective.
2. $f^{-1}(y)$ est *acyclique* $\forall y \in Y$.

Le résultat classique suivant est bien connu.

Théorème 3.1 (Théorème de Vietoris-Begle, voir BEGLE[3])

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application propre, i.e. $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact $K \subset Y$, et si de plus f est de Vietoris alors elle induit un isomorphisme

$$f_* : \check{H}(X) \longrightarrow \check{H}(Y).$$

Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application acyclique. Le graphe de F

$$G(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

est un espace topologique de Hausdorff localement compact et la projection canonique $p : G(F) \longrightarrow X$ est une application propre et de Vietoris. Il suit alors, grâce au Théorème de Vietoris-Begle, que $p_* : \check{H}(G(F)) \longrightarrow \check{H}(X)$ est un isomorphisme.

Définition 3.4 (Voir SIEGBERG et SKORDEV[28]) *Soient $F : X \longrightarrow Y$ une application multivoque acyclique et semi-continue supérieurement et p, q les projections canoniques de $G(F)$ sur (respectivement) X et Y . L'homomorphisme*

$$F_* : \check{H}(X) \longrightarrow \check{H}(Y)$$

induit par F dans l'homologie est défini par la formule

$$F_* = q_* \circ (p_*)^{-1}. \quad (3.2)$$

Remarque 3.1 La version générale du Théorème de Vietoris-Begle est vraie dans le cas des homologies de Vietoris ou de Čech à coefficients dans un corps. Dans le cas des applications aux ensembles et applications représentables, nous travaillons avec des polyèdres finis et des applications telles que les images et images inverses de polyèdres finis par ces applications sont des polyèdres finis. Dans ce cas, les résultats précédents restent vrais pour toute homologie et tout anneau de coefficients.

Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ deux grilles convexes dans \mathbb{R}^n , $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$, $Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_2}$ et $F : X \longrightarrow Y$ une application parfaite ou presque parfaite. Il est facile à établir (voir la discussion qui suit la preuve du Lemme 2.1) que $F(x)$ est un ensemble étoilé pour tout $x \in X$. Il suit alors que F est une application multivoque acyclique. D'autre part, X et Y sont deux ensembles compacts de Hausdorff. L'application F induit alors un homomorphisme F_*

dans l'homologie donné par la formule 3.2.

Notons que les applications de chaîne

$$p_{\#} : C(G(F)) \longrightarrow C(X) \quad \text{et} \quad q_{\#} : C(G(F)) \longrightarrow C(Y)$$

induites par les projections canoniques $p : G(F) \longrightarrow X$ et $q : G(F) \longrightarrow Y$ sont données sur les cellules élémentaires par les formules suivantes:

$$p_{\#n}(e \times e') = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim e < n \\ e & \text{si } \dim e = n, \end{cases}$$

et

$$q_{\#n}(e \times e') = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim e' < n \\ e' & \text{si } \dim e' = n. \end{cases}$$

Le résultat suivant établira que la définition précédente de F_* se basant sur le Théorème de Vietoris-Begle coïncide avec celle donnée au chapitre 2 (Définition 2.8) se basant sur la construction d'une application de chaîne associée à F .

Théorème 3.2 *Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ deux grilles convexes dans \mathbb{R}^n , $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$, $Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_2}$ et $F : X \longrightarrow Y$ une application parfaite ou presque parfaite. Il existe une application de chaîne*

$$\psi : C(X) \longrightarrow C(G(F))$$

telle que

$$|\psi(\sigma)| \subseteq \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_1(X).$$

De plus, l'application $\varphi = q_{\#} \circ \psi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ est une \mathcal{E}_1 -application de chaîne associée à F et ψ est l'inverse homotopique de l'application de chaîne $p_{\#}$. D'où

$$\psi_* = (p_*)^{-1}.$$

Preuve. Nous procédons en deux étapes:

1- Construction de ψ : Nous construisons pour tout entier $q \leq 0$ une application de chaîne $\psi_q : C_q(X) \longrightarrow C_q(G(F))$ telle que

$$|\psi_q(\sigma)| \subseteq \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in C_q(X). \quad (3.3)$$

Il suffit de définir ψ_q sur les générateurs.

Soit v sommet dans X . Puisque $\mathcal{A}_F(v)$ est fermé et non vide, on peut choisir un sommet $v \in \mathcal{A}_F(v)$. Posons alors

$$\psi_0(v) = v \times v_0.$$

Il est bien clair que $|\psi_0(v)| \subset v \times \mathcal{A}_F(v) \subset v \times F(v) \subset G(F)$.

Pour une cellule $\sigma \in (\mathcal{E}_1)^1(X)$ telle que $\partial_1 \sigma = v_2 - v_1$, posons

$$z = \psi_0(\partial_1 \sigma) = \psi_0(v_2) - \psi_0(v_1).$$

Il est aisé de voir que $|z| \subset \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma) \subset G(F)$. Soit $\varepsilon : C_0(G(F)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction augmentation pour $C_0(G(F))$. Puisque ψ_0 préserve l'augmentation, il s'en suit que $\varepsilon(z) = 0$. Notons que $\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)$ est un ensemble convexe, donc $\tilde{H}_0(\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma))$ est un groupe trivial. Il existe donc une chaîne $c \in C_1(\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma))$ telle que $\partial_1 c = z$. Nous définissons alors

$$\psi_1 \sigma := c.$$

La condition 3.3 est bien satisfaite et on a par définition

$$\psi_0(\partial_1 \sigma) = z = \partial_1(\psi_1 \sigma).$$

Supposons alors que pour tout entier $0 \leq i \leq q - 1$, il existe un homomorphisme $\psi_i : C_i(X) \longrightarrow C_i(G(F))$ tel que

$$1. \quad |\psi_i(\sigma)| \subseteq \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma) \quad \forall \sigma \in (\mathcal{E}_1)^i(X).$$

$$2. \psi_{i-1}\partial_i = \partial_i\psi_i .$$

Soit $\sigma \in (\mathcal{E}_1)^q(X)$. Par hypothèse d'induction $\psi_{q-1}(\partial_q\sigma)$ est un cycle et $|\psi_{q-1}(\partial_q\sigma)| \subseteq \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)$. Puisque $\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)$ est un ensemble convexe (donc $\tilde{H}(\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)) = 0$), il existe une chaîne $c \in \bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)$ telle que $\partial_q c = \psi_{q-1}(\partial_q\sigma)$.

On définit alors $\psi_q(\sigma) := c$.

Par définition même, ψ_q satisfait les conditions 1 et 2 ci-dessus. Il est aisément vérifiable que l'homomorphisme $\varphi = q_{\#} \circ \psi$ est une application de chaîne associée à F .

2- ψ est l'inverse homotopique de $p_{\#}$: Nous démontrons d'abord, par induction sur l'entier naturel q , que

$$(p_{\#})_q \circ \psi_q = (id_{C(X)})_q.$$

Il suffit bien entendu de montrer que l'égalité est vraie pour les générateurs. Soit v un sommet dans X . On a par définition

$$(p_{\#})_0 \circ \psi_0(v) = (p_{\#})_0(v \times v_0) = v = (id_{C(X)})_0(v).$$

Supposons alors que pour tout entier $0 \leq i \leq q-1$ on a $(p_{\#})_i \circ \psi_i = (id_{C(X)})_i$.

Pour $i = q$:

Pour tout $\sigma \in (\mathcal{E}_1)^q(X)$, on a

$$(p_{\#})_{q-1} \circ \psi_{q-1}(\partial_q\sigma) = \partial_q\sigma = \partial_q \left[(p_{\#})_q \circ \psi_q(\sigma) \right].$$

Par définition de $p_{\#}$ et ψ , on a

$$|(p_{\#})_q \circ \psi_q(\sigma)| \subset \bar{\sigma}.$$

Il suit que $(p_{\#})_q \circ \psi_q(\sigma)$ est une q -chaîne non triviale qui a la même frontière que σ et comme son support est contenu dans $\bar{\sigma}$, on déduit que

$$(p_{\#})_q \circ \psi_q(\sigma) = \sigma.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant pour continuer cette preuve. Pour toute cellule $e \in (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)(X)$, introduisons l'ensemble

$$\mathcal{F}(e) = \cup \{ \sigma \times F(\sigma) : \sigma \leq e \} = p^{-1}(\bar{e}).$$

Lemme 3.1 *L'ensemble $\bar{e} \times F(e)$ est un rétract de déformation de $\mathcal{F}(e)$.*

Preuve. Si F est une application parfaite, on peut donner la rétraction de façon explicite. En effet, choisissons $y_0 \in F(e)$ et définissons l'application

$$H : \mathcal{F}(e) \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{F}(e),$$

par la formule

$$H((x, y), t) = (x, ty_0 + (1 - t)y).$$

H est continue et satisfait les propriétés suivantes:

1. $H((x, y), 0) = (x, y)$
2. $H((x, y), 1) = (x, y_0) \in \bar{e} \times y_0$
3. $H((x, y), t) \in \bar{e} \times y_0$ if $(x, y) \in \bar{e} \times y_0$

Si F est presque parfaite, on peut voir pour un premier temps que pour tout $\sigma \leq e$, $F(\sigma)$ se rétracte sur $F(e)$. Ceci s'explique par le fait que $F(e) \subset F(\sigma)$ et que les ensembles $F(e)$ et $F(\sigma)$ sont étoilés. Il suit que $\sigma \times F(\sigma)$ se rétracte sur $\sigma \times F(e)$ pour tout $\sigma \leq e$. Il suit alors que l'ensemble $\mathcal{F}(e)$ est acyclique. \square

Nous allons maintenant construire par induction sur q une homotopie de chaîne

$$\left\{ D_q : C_q(G(F)) \longrightarrow C_{q+1}(G(F)) \right\}_q$$

entre $\psi \circ p_{\#}$ et $id_{C(G(F))}$. Nous définirons D_q sur les générateurs seulement.

Pour $q = 0$:

Soient $v \times v'$ un sommet de $G(F)$ et $\varepsilon : C_0(G(F)) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la fonction augmentation pour $C_0(G(F))$. Posons

$$z = \psi_0 \circ p_{\#0}(v \times v') - id_{C(G(F))}(v \times v').$$

Nous avons $\psi_0 \circ p_{\#0}(v \times v') = \psi_0(v) \subset v \times \mathcal{A}_F(v) \subset v \times F(v)$. D'où,

$$|\psi_0 \circ p_{\#0}(v \times v') - id_{C(G(F))}(v \times v')| \subseteq v \times F(v) = \mathcal{F}(v).$$

Il suit alors que z est un cycle dont le support est contenu dans $\mathcal{F}(v)$. Puisque $\mathcal{F}(v)$ est un ensemble acyclique, $\tilde{H}_0(\mathcal{F}(v))$ est un groupe trivial. Il existe donc une chaîne $c \in C_1(\mathcal{F}(v))$ telle que

$$\partial_1 c = \psi_0 \circ p_{\#0}(v \times v') - id_{C(G(F))}(v \times v').$$

On définit alors

$$D_0(v \times v') := c.$$

Supposons que pour $0 \leq i \leq q-1$, il existe un homomorphisme

$$D_i : C_i(G(F)) \longrightarrow C_{i+1}(G(F))$$

tel que

1. $\partial_{i+1} \circ D_i + D_{i-1} \circ \partial_i = \psi \circ p_{\#} - id_{C(G(F))}$.
2. $|D_i(e \times e')| \subseteq \mathcal{F}(e)$.

Pour $i = q$:

Soit $e \times e' \in (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)^q[G(F)]$. Posons

$$z = \psi \circ p_{\#}(e \times e') - id_{C(G(F))}(e \times e') - D_{q-1} \partial_q(e \times e').$$

On peut facilement voir que $|\psi \circ p_{\#}(e \times e')| \subset \bar{e} \times \mathcal{A}_F(e) \subset \mathcal{F}(e)$ et $|e \times e'| \subset \bar{e} \times F(e) \subset \mathcal{F}(e)$.

On peut alors voir grâce aux hypothèses d'induction que $|z| \subseteq \mathcal{F}(e)$. Puisque z est un cycle dans $\mathcal{F}(e)$ et $\mathcal{F}(e)$ est acyclique, il existe une chaîne $c \in C_{q+1}(\mathcal{F}(e))$ telle que $\partial_{q+1}c = z$. On pose

$$D_q(e \times e') := c$$

On peut vérifier sans peine que les hypothèses d'induction sont bien satisfaites. \square

Corollaire 3.1 Soient $F : X \longrightarrow Y$ une application parfaite ou presque parfaite et $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ une application de chaîne associée à F donnée par le Théorème 3.2. Alors

$$\varphi_* = F_* = q_* \circ (p_*)^{-1}.$$

Preuve. Par le Théorème 3.2, il existe une application de chaîne $\psi : C(X) \longrightarrow C(G(F))$ telle que $\psi_* = (p_*)^{-1}$ et $q_{\#} \circ \psi$ est une application de chaîne associée à F . Grâce au Théorème 2.3, on déduit que

$$\varphi_* = (q_{\#} \circ \psi)_* = q_* \circ (p_*)^{-1} = F_*. \quad \square$$

Corollaire 3.2 Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application univoque continue, $X \in \mathcal{R}$ et $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une représentation parfaite ou presque parfaite de f . Soient $Y \in \mathcal{R}$ un ensemble représentable tel que

$$f(X) \subset F(X) \subset Y \tag{3.4}$$

et $\varphi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ une application de chaîne associée à F . Alors

$$\varphi_* = f_*,$$

où f est considérée comme application de X dans Y .

Preuve. Soient $j : G(f) \longrightarrow G(F)$ l'injection canonique et

$$p : G(F) \longrightarrow X, \quad q : G(F) \longrightarrow Y$$

les projections introduites précédemment. On sait que $p_* : H(G(F)) \longrightarrow H(X)$ est un isomorphisme. D'autre part, comme $p \circ j : G(f) \longrightarrow X$ est un homéomorphisme, $(p \circ j)_* : H(G(f)) \longrightarrow H(X)$ est un isomorphisme. Il en résulte alors que l'homomorphisme $j_* : H(G(f)) \longrightarrow H(G(F))$ est un isomorphisme et

$$f_* = ((q \circ j) \circ (p \circ j)^{-1})_* = q_* \circ j_* \circ j_*^{-1} \circ (p_*)^{-1} = F_*. \quad \square$$

Le but principal des théorèmes précédents est de produire une construction explicite de l'homomorphisme f_* induit dans l'homologie par l'application univoque continue f via une quelconque de ses représentations multivoques F . L'application F a donc, par définition même, une sélection continue. Les hypothèses demandant que F soit parfaite ou presque parfaite sont alors très naturelles. Cependant, le Théorème de Vietoris-Begle assure que l'homomorphisme F_* est bien défini même dans le cas où F n'a pas de sélection continue. On peut alors étendre le procédé de la construction explicite de F_* à une application représentable F qui ne possède pas nécessairement une sélection continue.

Théorème 3.3 *Soit $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application représentable ayant des valeurs convexes non vides. Il existe une application de chaîne*

$$\psi : C(X) \longrightarrow C(G(F))$$

avec les propriétés suivantes

1. $|\psi(\sigma)| \subseteq p^{-1}(\bar{\sigma}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(X).$
2. $\psi_* = (p_*)^{-1}.$

De plus, $\varphi = q_{\#} \circ \psi : C(X) \longrightarrow C(Y)$ satisfait

$$\varphi(\sigma) \subset F(\bar{\sigma}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(X), \quad \text{et} \quad \varphi_* = F_*.$$

Preuve. Il est d'abord clair que l'ensemble $p^{-1}(\bar{\sigma})$ est acyclique. En effet, puisque $F(\sigma)$ est convexe pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_1(X)$ et $F(\sigma) \subset F(\tau)$ pour tout $\tau \leq \sigma$, l'ensemble convexe $\bar{\sigma} \times y_0$ est un rétract de déformation de $p^{-1}(\bar{\sigma})$ pour tout $y_0 \in F(\sigma)$, avec la même homotopie que celle définie dans la preuve du Théorème 3.2.

Pour la construction de ψ et la vérification du fait que $\psi_* = (p_*)^{-1}$ et $\varphi_* = q_* \circ (p_*)^{-1}$, on peut suivre les mêmes lignes que celles de la preuve du Théorème 3.2 en remplaçant $\bar{\sigma} \times \mathcal{A}_F(\sigma)$ par $p^{-1}(\bar{\sigma})$. \square

Remarque 3.2 Il est tout à fait clair que les conditions de convexité peuvent être remplacées par des conditions d'acyclicité dans tous les résultats de la section 2.3 du chapitre 2 et tout le long de cette section. Cependant, nous avons omis délibérément cette généralisation puisque le but poursuivi est la construction algorithmique des homomorphismes induits dans l'homologie et de ce fait, toute propriété dont la vérification entraîne une complication au niveau algorithmique est automatiquement évitée. Il en est ainsi pour la vérification qu'un ensemble représentable est acyclique qui est réellement un problème algorithmique très complexe.

On peut en effet reprendre les résultats de la section 2.3 du chapitre 2 dans un contexte plus général et avec des ajustements mineurs des preuves pour la classe des applications

représentables $F : X \longrightarrow Y$ satisfaisant la condition

(A) Pour tout $e \in \mathcal{E}(X)$, $F(e)$ et $F(\bar{e})$ sont acycliques.

Par ailleurs, les résultats de cette section restent vrais pour les applications représentables satisfaisant la condition

(A') Pour tout $e \in \mathcal{E}(X)$, les ensembles $p^{-1}(e)$ et $p^{-1}(\bar{e})$ sont acycliques.

3.2 Homologie d'une application continue

Soient X et Y deux sous-ensembles représentables de \mathbb{R}^n relativement à une grille convexe \mathcal{E} et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Nous voulons construire l'homomorphisme $f_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$. Si f admet une représentation parfaite ou presque parfaite F satisfaisant la condition $F(X) \subset Y$, la réponse est déjà donnée dans le Corollaire 3.2. Dans le cas général, il n'est pas garanti de pouvoir construire une telle représentation pour f . Le Théorème 2.1 permet cependant de construire des représentations dont l'image est contenue dans un voisinage arbitraire de Y . Nous allons donc exploiter ce résultat pour donner des lignes générales d'une construction de f_* qui ne repose pas sur la condition 3.4, dite la Condition Y.

Sans restreindre la généralité, nous nous plaçons dans le cas des grilles cubiques \mathcal{E}_k définies dans l'Exemple 2.2. Pour k, m des entiers positifs où k est un diviseur de m , on sait que \mathcal{E}_m est une subdivision (sous-grille) de \mathcal{E}_k . Nous dénotons par $\mu_{k,m}$ l'opérateur de subdivision défini précédemment (voir la formule 2.4).

Soit $X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_k}$. Dénотons par $C(X, i)$ le complexe de chaîne engendré par la grille cubique

$\mathcal{E}_i(X)$.

Théorème 3.4 *L'application $\mu_{k,m} = \mu : C(X, k) \longrightarrow C(X, m)$ induit un isomorphisme dans l'homologie.*

Preuve: Nous traitons ici le cas particulier où X est un sous ensemble du plan \mathbb{R}^2 , ce qui donne déjà une très bonne idée de la démonstration du cas général qu'on peut trouver dans KACZYNSKI et al.[16]. Puisque k divise m , on peut sans restreindre la généralité prendre $k = 1$. Pour bien fixer les idées, nous allons également travailler avec $m = 3$. Nous construisons explicitement l'inverse homologique

$$\lambda = \lambda_{3,1} : C(X, 3) \longrightarrow C(X, 1)$$

de l'application $\mu = \mu_{1,3} : C(X, 1) \longrightarrow C(X, 3)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, dénotons par \underline{x} la partie entière de x et \bar{x} le plus petit entier supérieur ou égal à x . Nous utilisons également la notation

$$(a, b) = \begin{cases}]a, b[& \text{si } a \neq b, \\ \{a\} & \text{si } a = b. \end{cases} \quad (3.5)$$

Toute cellule $e = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in \mathcal{E}_3(X)$ est contenue dans une unique cellule $\tilde{e} \in \mathcal{E}_1(X)$ (voir la Proposition 2.5) qui est donnée exactement par la formule

$$\tilde{e} = (\underline{a}_1, \bar{b}_1) \times (\underline{a}_2, \bar{b}_2).$$

Associons à tout intervalle (a, b) , où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b - a = 0$ ou 1 , l'ensemble

$$(a, b)_c = \begin{cases} (a + \frac{1}{3}, b - \frac{1}{3}) & \text{si } a \neq b, \\ (a, b) & \text{si } a = b, \end{cases}$$

appelé la *partie centrale* de (a, b) . Il en découle immédiatement que (a, b) a la même dimension que $(a, b)_c \subset (a, b)$. Il suit que pour toute cellule $Q = (a, b) \times (\alpha, \beta) \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$, il existe une unique cellule $Q' = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \in \mathcal{E}_3(Q)$ telle que $(a_1, b_1) = (a, b)_c$

et $(a_2, b_2) = (\alpha, \beta)_c$. La cellule $Q' = (a, b)_c \times (\alpha, \beta)_c$, que l'on dénotera désormais par Q_c , est par définition la cellule centrale de Q ayant la même dimension que Q et on a $\tilde{Q}_c = Q$ (voir la figure 3.1).

Pour tout sommet $e = \{a\} \times \{b\} \in \mathcal{E}_3^0(X)$, on définit $\lambda_0(e)$ comme étant le sommet de $\mathcal{E}_1^0(X)$ le plus proche de e . En d'autres termes, $\lambda_0(e)$ est l'unique sommet de $\mathcal{E}_1^0(X)$ satisfaisant $\|e - \lambda_0(e)\| \leq \frac{1}{3}$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme du maximum. Plus précisément, si pour tout nombre $a \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, nous définissons

$$\nu(a) = \begin{cases} \underline{a} & \text{si } a - \underline{a} \leq \frac{1}{3}, \\ \bar{a} & \text{si } a - \underline{a} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

alors $\lambda_0(e) = \lambda_0(\{a\} \times \{b\}) = \{\nu(a)\} \times \{\nu(b)\}$. Il est clair alors que $\{\nu(a)\} \times \{\nu(b)\} \in \bar{e}$.

On peut facilement observer que pour tout intervalle (a, b) avec $a, b \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ et $b - a = \frac{1}{3}$, on a

$$\nu(a) \neq \nu(b) \iff (a, b) = \left(\nu(a), \nu(b) \right)_c.$$

La propriété de l'application de chaîne permet de définir λ_q pour $q \geq 1$. En effet, prenons le cas simple où $e = (a, b) \times \{c\} \in \mathcal{E}_3^1(\mathbb{R}^2)$. On doit avoir

$$\partial_1(\lambda_1 e) = \lambda_0(\partial_1 e) = \lambda_0(\{b - a\} \times \{c\}) = \{\nu(b) - \nu(a)\} \times \{\nu(c)\}.$$

Il convient alors de définir

$$\lambda_1(e) = \begin{cases} \left(\nu(a), \nu(b) \right) \times \{\nu(c)\} & \text{si } \nu(a) \neq \nu(b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définira de façon similaire $\lambda_1(e)$ pour les cellules de $e \in \mathcal{E}_3^1(\mathbb{R}^2)$ ayant la forme $e = \{a\} \times (b, c)$ et pour toute cellule $e \in \mathcal{E}_3^2(\mathbb{R}^2)$ de la forme $e = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, on pose

$$\lambda_2(e) = \begin{cases} \left(\nu(a_1), \nu(b_1) \right) \times \left(\nu(a_2), \nu(b_2) \right) & \text{si } \nu(a_1) \neq \nu(b_1) \text{ et } \nu(a_2) \neq \nu(b_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En résumé, si nous dénotons par $\nu(e)$ la cellule $\left(\nu(a_1), \nu(b_1) \right) \times \left(\nu(a_2), \nu(b_2) \right)$, on peut écrire une formule d'ensemble

$$\lambda_q(e) = \begin{cases} \nu(e) & \text{si } \dim e = \dim \nu(e), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut voir aisément que λ est une application de chaîne qui préserve l'augmentation. De plus $\lambda_q(e) \in C_q(X, 1)$ pour tout $e \in \mathcal{E}_3^q(X)$ et $|\lambda_q(e)| \subset \bar{e}$. Pour tout $Q \in \mathcal{E}_1^q(X)$, $\lambda_q(Q_c) = Q$ et $\lambda_q(e) = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_3^q(Q) \setminus \{Q_c\}$. Ces propriétés de λ impliquent notamment que $\lambda \circ \mu = I_{C(X, 1)}$ et $\mu \circ \lambda$ est homotopique, par une homotopie de chaîne, à $I_{C(X, 3)}$. La démonstration de ce dernier fait suit les mêmes lignes que les preuves du Théorème 2.3 et du Théorème 3.2 (on peut également se référer au Théorème du Support Acyclique, voir MASSEY[18], Chapitre 1, Section 13). Il suffit pour cela de remarquer que $Q \subset \bar{Q}$, $|\mu \circ \lambda(Q)| \subset \bar{Q}$ et \bar{Q} est un rectangle de \mathbb{R}^2 contenu dans X . C'est donc un ensemble acyclique pour tout $Q \in \mathcal{E}_3(X)$. Il suit alors que

$$\lambda_* = (\mu_*)^{-1}. \quad \square$$

Soit X un ensemble représentable relativement à \mathcal{E}_1 . Pour tout $k \geq 1$, définissons

$$\text{st}_{\mathcal{E}_k} X := \cup \{ \bar{e} : e \in \mathcal{E}_k \text{ et } \bar{e} \cap X \neq \emptyset \}.$$

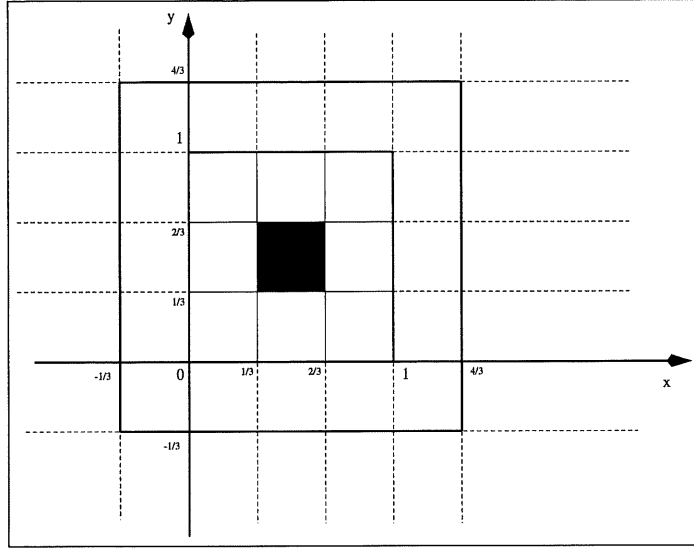


FIG. 3.1 – Cellule centrale de $e =]0, 1[{}^2$ et $st_{\mathcal{E}_3}(]0, 1[{}^2)$.

L'ensemble $st_{\mathcal{E}_k} X$ est en fait l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 dont la distance à X , au sens de la norme du maximum, est inférieure ou égale à $\frac{1}{k}$. Par définition même, $st_{\mathcal{E}_k} X$ est un ensemble représentable relativement à \mathcal{E}_k . Nous pouvons à ce stade montrer le résultat suivant:

Théorème 3.5 *Si $k \geq 3$ alors $H(st_{\mathcal{E}_k} X) \simeq H(X)$.*

Preuve: On fera la démonstration pour $k = 3$. Posons $Z = st_{\mathcal{E}_3} X$ et soit

$$\varphi = j_{\#} \circ \mu : C(X, 1) \longrightarrow C(Z, 3)$$

la composition de l'identité de chaîne $j_{\#} : C(X, 3) \longrightarrow C(Z, 3)$ avec l'opérateur de subdivision $\mu : C(X, 1) \longrightarrow C(X, 3)$. Nous allons définir dans ce qui suit l'inverse homologique $\psi : C(Z, 3) \longrightarrow C(X, 1)$ de φ . Soient $Y = st_{\mathcal{E}_1} X$ de telle sorte que $X \subset Z \subset Y$ et $\lambda : C(Y, 3) \longrightarrow C(Y, 1)$ l'inverse homologique de l'opérateur de subdivi-

vision $\mu' : C(Y, 1) \longrightarrow C(Y, 3)$. Par définition, $\lambda(C(X, 3)) \subset C(X, 1)$. Il s'en suit que $\lambda|_{C(X, 3)}$ est l'inverse homologique de l'opérateur de subdivision μ . En réalité, nous avons

$$\lambda(C(Z, 3)) \subset C(X, 1).$$

En effet, on va démontrer que pour tout $Q \in \mathcal{E}_3^q(Z)$, on a $|\lambda_q(Q)| \subset X$. Remarquons d'abord que $\mathcal{E}_3^q(Z) \subset \mathcal{E}_3^q(Y)$.

Pour $q = 0$: Soit $Q = \{a\} \times \{b\} \in \mathcal{E}_3^0(Z)$ et supposons que $\lambda_0(Q) \in \mathcal{E}_1(Y) \setminus \mathcal{E}_1(X)$ car sinon le résultat est évident. Il suit que $\lambda_0(Q) = \{\nu(a)\} \times \{\nu(b)\} \notin X$ et il en découle que

$$\left(\nu(a) - 1, \nu(a) + 1\right) \times \left(\nu(b) - 1, \nu(b) + 1\right) \cap X = \emptyset.$$

Cela veut dire que la distance de $\lambda_0(Q)$ à X est supérieure ou égale à 1. D'où

$$\text{st}_{\mathcal{E}_3}(\lambda_0(Q)) \cap Z = \emptyset.$$

Puisque, par définition, $\|Q - \lambda_0(Q)\| \leq \frac{1}{3}$, on conclut finalement que $Q \in \text{st}_{\mathcal{E}_3}(\lambda_0(Q))$, ce qui constitue une contradiction à l'hypothèse $Q \in Z$.

Pour $q \geq 1$ et $Q \in \mathcal{E}_3^q(Z)$, on a par définition, $\lambda_q(Q) = 0$ ou $\lambda_q(Q) \in \mathcal{E}_1^q(Y)$. Supposons qu'il existe une cellule $Q \in \mathcal{E}_3^q(Z)$ telle que

$$\lambda_q(Q) \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_q(Q) \in \mathcal{E}_1(Y) \setminus \mathcal{E}_1(X).$$

Si $Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, alors on a dans ce cas

$$\lambda_q(Q) = \nu(Q) = \left(\nu(a_1), \nu(b_1)\right) \times \left(\nu(a_2), \nu(b_2)\right).$$

Pour $q = 1$: Supposons qu'on soit dans le cas $\nu(a_1) \neq \nu(b_1)$ et $\nu(a_2) = \nu(b_2)$. Par ce qui précède on a

$$\lambda_1(Q) = \left(\nu(a_1), \nu(b_1)\right) \times \{\nu(a_2)\} \notin \mathcal{E}_1(X).$$

On déduit alors que $(\nu(a_1), \nu(b_1)) \times (\nu(a_2) - 1, \nu(a_2) + 1) \cap X = \emptyset$. On a

$$\overline{Q} = \overline{(\nu(a_1), \nu(b_1))}_c \times \{a_2\} \subset (\nu(a_1), \nu(b_1)) \times (\nu(a_2) - 1, \nu(a_2) + 1).$$

D'où $\overline{Q} \cap X = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse $Q \in \mathcal{E}_3^2(Z)$.

Pour $q = 2$: On a alors $\nu(a_i) \neq \nu(b_i)$ pour $i = 1, 2$ et par ce qui précède

$$\nu(Q) = \tilde{Q} \quad \text{et} \quad Q = \nu(Q)_c = \tilde{Q}_c.$$

Il suit que $Q \subset \tilde{Q}$ et alors $\overline{Q} \cap X = \emptyset$ ce qui contredit l'hypothèse $Q \in \mathcal{E}_3^2(Z)$.

Il suit que l'application de chaîne

$$\psi = \lambda_{|C(Z,3)} : C(Z, 3) \longrightarrow C(X, 1)$$

est bien définie. Vérifions que ψ est bien l'inverse homologique de φ . On peut noter immédiatement que suite aux remarques précédentes, on a $\psi \circ \varphi = Id_{C(X,1)}$. On va maintenant montrer que $\varphi \circ \psi$ est homotopique de chaîne à $Id_{C(Z,3)}$. Posons pour tout $Q \in \mathcal{E}_3^q(Z)$

$$\Phi(Q) = \begin{cases} \text{st}_{\mathcal{E}_3}(\overline{\lambda_q Q}) & \text{si } \lambda_q(Q) \neq 0, \\ \overline{Q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut remarquer que $\Phi(Q)$ est un rectangle de \mathbb{R}^2 contenu dans Z . C'est donc un ensemble acyclique. De plus, par construction de $\lambda_q(Q)$, on a $Q \subset \text{st}_{\mathcal{E}_3}(\overline{\lambda_q Q})$ lorsque $\lambda_q(Q) \neq 0$. On a alors

$$|\varphi \circ \psi(Q)| = |\mu \circ \lambda(Q)| \subset \Phi(Q) \quad \text{et} \quad Q \subset \Phi(Q). \quad (3.6)$$

Les mêmes arguments que ceux employés dans la fin de la preuve du théorème précédent permettent alors de terminer la présente preuve. \square

Soient $X, Y \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}$ et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. On peut alors associer à f une de ses représentations $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ relativement à \mathcal{E}_k construite comme dans le Théorème 2.1 en prenant ε et k tels que $F(X) \subset \text{st}_{\mathcal{E}_3} Y$ et $\psi : C(\text{st}_{\mathcal{E}_3} Y, 3) \longrightarrow C(Y, 1)$ l'inverse homologique de l'application de chaîne $\varphi = j_{\#} \circ \mu : C(Y, 1) \longrightarrow C(\text{st}_{\mathcal{E}_3} Y, 3)$ construite comme dans le Théorème 3.5.

Définition 3.5 *L'homomorphisme induit dans l'homologie par f est donné par la formule*

$$f_{\ast} := \psi_{\ast} \circ F_{\ast}. \quad (3.7)$$

Chapitre 4

Constructions et exemples

Nous consacrons ce chapitre en premier lieu à expliciter davantage la preuve du Théorème 2.2 en donnant une construction géométrique concrète de la cofrontière d'un cycle réduit donné. Cela constitue une étape importante vers la production d'un algorithme qui calcule l'homomorphisme induit dans l'homologie par une fonction continue. Nous donnons ensuite des exemples pratiques de construction de ces cofrontières et des représentations de fonctions continues données. Nous terminons avec la section dédiée à l'application de l'homologie dans la théorie de l'indice de Conley.

4.1 Construction de la cofrontière d'un cycle

Dans la preuve du Théorème 2.2 du chapitre 2, nous avons établi que pour un cycle réduit $z = \varphi_{q-1}(\partial_q \sigma)$, il existe une q -chaîne c telle que $\partial_q c = z$, en utilisant la propriété de convexité (acyclicité) de l'ensemble $\mathcal{A}_F(\sigma)$. On peut se demander si les arguments théoriques utilisés dans cette preuve ne constituent pas une obstruction pour la mise au point d'un algorithme précis qui permettra la construction de cette chaîne de façon combinatoire. Nous allons voir que si la discrétisation de l'espace se fait à l'aide d'une

grille cubique (voir Exemple 2.2), on peut donner une construction géométrique précise de la *cofrontière* c d'un cycle réduit donné z , i.e. une chaîne c telle que $\partial c = z$.

En effet, soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ la grille cubique unitaire dans \mathbb{R}^n et $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectangle représentable. Étant donné un cycle réduit $z \in \tilde{Z}_q(A)$, nous construisons une chaîne $c \in C_{q+1}(A)$ telle que $\partial_{q+1}c = z$. Nous dénotons cette procédure par $c := COF(z)$ où COF désigne le mot *cofrontière*.

On construit d'abord de façon générale $COF : C_q(A) \longrightarrow C_{q+1}(A)$. Soit $\sigma \in C_q(A)$. On peut alors écrire

$$\sigma = \sum_{i=1}^N c_i e_i \quad \text{où} \quad e_i \in \mathcal{E}^q(A).$$

Chaque e_i peut être exprimé sous la forme

$$e_i = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n)$$

où

$$(a, b) = \begin{cases}]a, b[& \text{si } a \neq b, \\ \{a\} & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Les extrémités des intervalles $(a_i)_k, (b_i)_k$ sont des entiers satisfaisant une des égalités $(b_i)_k = (a_i)_k + 1$ ou bien $(b_i)_k = (a_i)_k$, et la première égalité est vérifiée pour exactement q valeurs de k .

Soit $R(\sigma)$ le plus petit rectangle dans A contenant $|\sigma|$ (le support de σ). Il est aisé de voir que

$$R(\sigma) = [m_1, M_1] \times [m_2, M_2] \times \dots \times [m_n, M_n]$$

où $m_k = \min_i \{(a_i)_k\}$ et $M_k = \max_i \{(b_i)_k\}$.

Soit alors k_1 la première coordonnée non triviale de $R(\sigma)$, i.e. le plus petit entier k satisfaisant la propriété $m_k \neq M_k$. Considérons

$$R_{k_1}(\sigma) = \{x \in R(\sigma) : x_{k_1} = m_{k_1}\},$$

l'hyperplan complétant la première direction non triviale k_1 de $R(\sigma)$ et soit

$$\pi_{k_1} : R(\sigma) \longrightarrow R_{k_1}(\sigma)$$

la projection canonique de $R(\sigma)$ sur $R_{k_1}(\sigma)$ et

$$(\pi_{\#})_q : C_q(R(\sigma)) \longrightarrow C_q(R_{k_1}(\sigma))$$

l'homomorphisme induit par π_{k_1} . L'homomorphisme $(\pi_{\#})_q$ est défini sur les q -cubes élémentaires $e \in C_q(R(\sigma))$ par

$$(\pi_{\#})_q(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_{k_1} = a_{k_1} + 1 \\ (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{k_1-1}, b_{k_1-1}) \times \{m_{k_1}\} \times \\ (a_{k_1+1}, b_{k_1+1}) \times \dots \times (a_n, b_n) & \text{si } b_{k_1} = a_{k_1}, \end{cases}$$

où $e = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$.

Nous construisons par induction sur d , la dimension de $R(\sigma)$, une $q+1$ -chaîne $COF(\sigma)$. Comme la dimension de $R(\sigma)$ est au moins q , l'induction commence à partir de $d = q$.

Si $d = q$, nous posons

$$COF(\sigma) = 0.$$

Soit $d \geq q$. Supposons que la construction est réalisée pour les dimensions inférieures ou égales à un certain $d \geq q$ et supposons que $\dim R(\sigma) = d + 1$. Définissons alors pour toute cellule $e = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ dans $\mathcal{E}^q(R(\sigma))$ la $q+1$ -chaîne

$$[(\pi_{\#})_q(e), e] = \begin{cases} 0 & \text{si } (\pi_{\#})_q(e) = 0 \text{ ou } e \subset R_{k_1}(\sigma), \\ \sum_{i=m_{k_1}}^{b_{k_1}-1} \left\{ (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{k_1-1}, b_{k_1-1}) \times \right. \\ \quad \left. (i, i+1) \times (a_{k_1+1}, b_{k_1+1}) \times \dots \times (a_n, b_n) \right\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Notons que si $(\pi_{\#})_q(e) \neq 0$ et e n'est pas contenu dans $R_{k_1}(\sigma)$ alors

$$\left| [(\pi_{\#})_q(e), e] \right| = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{k_1-1}, b_{k_1-1}) \times (m_{k_1}, b_{k_1}) \times (a_{k_1+1}, b_{k_1+1}) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

représente géométriquement le rectangle de dimension $q+1$ dans lequel $(\pi_{\#})_q(e)$ est amené jusqu'à e .

La $q+1$ -chaîne $COF((\pi_{\#})_q(\sigma))$ est alors bien définie par les hypothèses d'induction étant donné que $(\pi_{\#})_q(\sigma)$ est une q -chaîne contenue dans $R_{k_1}(\sigma)$, lequel est un rectangle de dimension d .

Définissons alors

$$COF(\sigma) := COF((\pi_{\#})_q(\sigma)) + \sum_{i=1}^N c_i [(\pi_{\#})_q(e_i), e_i].$$

Il est clair que $COF(\sigma) \in C_{q+1}(A)$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in C_q(A)$. On peut vérifier par induction sur la dimension de $R(\sigma_1 + \sigma_2)$ que

$$COF(\sigma_1 + \sigma_2) = COF(\sigma_1) + COF(\sigma_2), \quad (4.1)$$

ce qui prouve que COF est un homomorphisme de groupes. On déduit notamment de

ce qui précède que si $\sigma = \sum_{i=1}^N c_i e_i$ alors

$$\sum_{i=1}^N c_i [(\pi_{\#})_q(e_i), e_i] = COF\left(\sigma - (\pi_{\#})_q(\sigma)\right). \quad (4.2)$$

Soit maintenant $z = \sum_{i=1}^N c_i e_i$ un q -cycle réduit dont le support est contenu dans A . On montre dans ce qui suit que $COF(z)$ est la cofrontière de z , i.e.

$$\partial_{q+1} COF(z) = z. \quad (4.3)$$

Nous allons raisonner par induction sur la dimension de $R(z)$.

Si $d = q$: Par définition, on a $COF(z) = 0$. D'autre part, on a $C_{q+1}(R(z)) = 0$, ce qui implique que $B_q(R(z)) = 0$ et $\tilde{Z}_q(R(z)) = 0$ puisque $\tilde{H}_q(R(z)) = 0$. Sachant que $z \in \tilde{Z}_q(R(z))$, il suit que $z = 0$, ce qui montre que $\partial_{q+1} COF(z) = z$.

Soit $d \geq q$. Supposons que si $\dim R(z) \leq d$ l'équation (4.3) est satisfaite et montrons qu'elle est vraie si $\dim R(z) = d+1$. Commençons d'abord par établir le résultat suivant:

Lemme 4.1 *On a*

$$\partial_{q+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i \left[(\pi_{\#})_q(e_i), e_i \right] \right) = z - (\pi_{\#})_q(z).$$

Preuve. Nous allons raisonner par induction sur la longueur $M = M_{k_1} - m_{k_1}$ du premier côté non trivial du rectangle $R(z)$ (projection de $R(z)$ sur l'axe x_{k_1}). Notons que le passage de M à $M+1$ renferme les arguments qui prouvent le cas $M = 1$. Dans le cas où cette longueur est $M+1 = M_{k_1} - m_{k_1}$, le rectangle $R(z)$ est composé de $M+1$ tranches ayant chacune un côté de longueur 1 dans la direction de l'axe x_{k_1} .

Soit alors

$$R' = [m_1, M_1] \times [m_2, M_2] \times \dots \times [m_{k_1}, M_{k_1} - 1] \times \dots \times [m_n, M_n]$$

le rectangle formé des M premières tranches de $R(z)$ et considérons z' , l'image de z par la rétraction $r : R(z) \longrightarrow R'$, définie pour tout $x \in R(z)$ par la formule

$\{r(x)\}_i = x_i$ si $i \neq k_1$ et

$$\{r(x)\}_{k_1} = \begin{cases} x_{k_1} & \text{si } x_{k_1} \leq M_{k_1} - 1, \\ M_{k_1} - 1 & \text{si } x_{k_1} > M_{k_1} - 1. \end{cases}$$

Il s'en suit que $(\pi_{\#})_q(z) = (\pi_{\#})_q(z')$, z' est un cycle réduit dans R' et $z - z'$ est un cycle réduit dont le support est contenu dans la dernière tranche de $R(z)$ égale à

$$[m_1, M_1] \times [m_2, M_2] \times \dots \times [M_{k_1} - 1, M_{k_1}] \times \dots \times [m_n, M_n]$$

et qu'on note ici $R(z - z')$. Remarquons alors que si $M = 1$, on a $R' = R_{k_1}(z)$ et $z' = (\pi_{\#})_q(z)$.

Soit $\Gamma(z - z') = \Gamma = \sum_{i=1}^N c_i Q_i$ la somme partielle de $\sum_{i=1}^N c_i [(\pi_{\#})_q(e_i), e_i]$ formée des $q + 1$ -cubes Q_i contenus dans $R(z - z')$. On peut voir que chaque Q_i est formé à partir de

$$|[(\pi_{\#})_q(e_i), e_i]| = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times (m_{k_1}, (b_i)_{k_1}) \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n)$$

satisfaisant $(b_i)_{k_1} = M_{k_1}$ en prenant

$$Q_i = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times ((b_i)_{k_1} - 1, (b_i)_{k_1}) \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n).$$

Il est clair que par définition même on a

$$\Gamma(z - z') = COF(z - z').$$

Montrons alors que

$$\partial_{q+1}\Gamma = z - z', \tag{4.4}$$

ce qui prouve aussi le cas $M = 1$.

Pour démontrer la formule (4.4), on établit que pour toute cellule $e \in \mathcal{E}^q(R(z - z'))$, le coefficient de e dans $z - z'$ est égal à son coefficient dans $\partial_{q+1}\Gamma$. Pour ce faire, définissons

pour toute chaîne $\sigma = \sum_{i=1}^N c_i e_i$ et toute cellule $e \in \mathcal{E}^q(A)$ le "produit scalaire"

$$\langle e, c \rangle = \begin{cases} c_i & \text{si } e = e_i, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer que

$$\langle e, \partial_{q+1} \Gamma \rangle = \langle e, z - z' \rangle, \quad \forall e \in \mathcal{E}^q(R(z - z')). \quad (4.5)$$

Soit P_{k_1} la projection de $R(z)$ sur l'axe x_{k_1} . Trois types de q -cubes sont à considérer:

1. L'ensemble \mathcal{A} des q -cubes A de $R(z - z')$ tels que $P_{k_1}(A) = \{M\}$.
2. L'ensemble \mathcal{B} des q -cubes B de $R(z - z')$ tels que $P_{k_1}(B) = \{M + 1\}$.
3. L'ensemble \mathcal{C} des q -cubes C de $R(z - z')$ tels que $P_{k_1}(C) = [M, M + 1]$.

Les $q + 1$ -cubes $Q \in \mathcal{E}^{q+1}(R(z - z'))$ sont en nombre égal à celui des $B \in \mathcal{B}$ et des $A \in \mathcal{A}$. En effet, pour chaque

$$Q_i = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times ((b_i)_{k_1} - 1, (b_i)_{k_1}) \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n),$$

on retrouve un $B = B_i$ correspondant donné par la formule

$$B_i = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times \{(b_i)_{k_1}\} \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n)$$

et un $A = A_i$ donné par

$$A_i = ((a_i)_1, (b_i)_1) \times \dots \times \{(b_i)_{k_1} - 1\} \times \dots \times ((a_i)_n, (b_i)_n).$$

On peut voir aisément que si $B \in \mathcal{B}$ alors $B' = r(B) \in \mathcal{A}$. Plus précisément, la restriction de la rétraction r à \mathcal{B} est une bijection de \mathcal{B} dans \mathcal{A} . Pour $B \in \mathcal{B}$ donné, nous dénotons par $[B', B]$ le $q + 1$ -cube obtenu en amenant B' à B . On obtient ainsi une bijection de

\mathcal{B} dans $\mathcal{E}^{q+1}(R(z - z'))$. On peut remarquer que si $Q \in \mathcal{E}^{q+1}(R(z - z'))$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $Q \neq [B', B]$ alors

$$\langle B, \partial Q \rangle = \langle B', \partial Q \rangle = 0.$$

D'autre part, sachant que le sens positif est dans la direction croissante de l'axe x_{k_1} , on a

$$\langle B, \partial[B', B] \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle B', \partial[B', B] \rangle = -1.$$

Montrons alors l'identité (4.5) pour les éléments de \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} .

1. Soit $B \in \mathcal{B}$ et posons $b = \langle B, z - z' \rangle$. Comme $\langle B, z' \rangle = 0$, il suit que

$$b = \langle B, z \rangle = \langle [B', B], \Gamma \rangle.$$

On déduit alors que

$$\langle B, \partial_{q+1} \Gamma \rangle = b \langle B, \partial_{q+1} [B', B] \rangle = b.$$

2. Soit maintenant $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ tel que $B' = A$. Posons $a = \langle A, z \rangle$ et

$$b = \langle B, z \rangle = \langle [A, B], \Gamma \rangle.$$

Il suit que $\langle A, z' \rangle = a + b$ et alors $\langle A, z - z' \rangle = -b$. D'autre part

$$\langle A, \partial_{q+1} \Gamma \rangle = b \langle A, \partial_{q+1} [A, B] \rangle = -b.$$

3. Enfin, soient $C \in \mathcal{C}$ et $\alpha = \langle C, z - z' \rangle = \langle C, z \rangle$ puisque $\langle C, z' \rangle = 0$. Considérons alors l'ensemble $\{B_j\}_{j \in J}$ des $B \in \mathcal{B}$ tels que C est une face de $[B', B]$ et posons $b_j = \langle B_j, z \rangle$. Par ce qui précède on a

$$b_j = \langle B_j, z \rangle = \langle [B'_j, B_j], \Gamma \rangle = \langle B_j, \partial_{q+1} \Gamma \rangle \quad \text{pour tout } j \in J.$$

En se rappelant que $\Gamma = \sum_{i=1}^N c_i Q_i$, on a

$$\langle C, \partial_{q+1} \Gamma \rangle = \langle C, \sum_{i=1}^N c_i \partial_{q+1} Q_i \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \langle C, \partial_{q+1} Q_i \rangle.$$

Si $i \in \{1, \dots, N\}$ est tel que Q_i n'est pas sous la forme $[B'_j, B_j]$ alors on nécessairement $\langle C, \partial_{q+1} Q_i \rangle = 0$. Soit $\alpha_j = \langle C, \partial_{q+1} [B'_j, B_j] \rangle$ le coefficient de C dans $\partial_{q+1} [B'_j, B_j]$. On a alors

$$\langle C, \partial_{q+1} \Gamma \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \langle C, \partial_{q+1} Q_i \rangle = \sum_{j \in J} b_j \langle C, \partial_{q+1} [B'_j, B_j] \rangle = \sum_{j \in J} b_j \alpha_j.$$

Soit alors F la $(q-1)$ -face de C située au niveau $x_{k_1} = M+1$. Il est clair que F est aussi une face de chacun des B_j . De plus, aucune autre q -cellule formant $z - z'$ hormis C et les B_j ne contient F comme face. Il suit alors que

$$0 = \langle F, \partial_q \partial_{q+1} [B'_j, B_j] \rangle = \langle F, \partial_q (\alpha_j C + B_j) \rangle = \langle F, \partial_q B_j \rangle + \alpha_j \langle F, \partial_q C \rangle \quad \forall j \in J.$$

D'autre part, puisque z est un cycle, on déduit de ce qui précède que

$$0 = \langle F, \partial_q z \rangle = \sum_{j \in J} b_j \langle F, \partial_q B_j \rangle + \alpha \langle F, \partial_q C \rangle = \left(\alpha - \sum_{j \in J} b_j \alpha_j \right) \langle F, \partial_q C \rangle.$$

On peut donc conclure que $\alpha = \sum_{j \in J} b_j \alpha_j$ ce qui démontre la formule (4.5) pour les éléments de \mathcal{C} .

La formule (4.5) est alors démontrée.

Sachant que $z - (\pi_{\#})_q(z) = z - z' + z' - (\pi_{\#})_q(z')$, on peut écrire grâce à la formule (4.1) que

$$COF\left(z - (\pi_{\#})_q(z)\right) = COF\left(z - z'\right) + COF\left(z' - (\pi_{\#})_q(z')\right).$$

L'hypothèse d'induction et les formules (4.5) et (4.2) permettent alors de conclure que

$$\partial_{q+1} \left(\sum_{i=1}^N c_i \left[(\pi_{\#})_q(e_i), e_i \right] \right) = z - (\pi_{\#})_q(z)$$

ce qui termine la démonstration du lemme. \square

Grâce aux hypothèses d'induction et au lemme précédent, on peut finalement écrire

$$\begin{aligned}\partial_{q+1} COF(z) &= \partial_{q+1} COF\left(z - (\pi_{\#})_q(z)\right) + \partial_{q+1} COF\left((\pi_{\#})_q(z)\right) \\ &= z - (\pi_{\#})_q(z) + (\pi_{\#})_q(z) \\ &= z\end{aligned}$$

ce qui démontre bien la formule (4.3).

Pour bien illustrer cette construction, nous allons considérer les exemples suivants:

Exemple 4.1 Soit, dans le plan cartésien, le cycle réduit orienté dans le sens des aiguilles d'une montre $z = e_8 + e_7 + e_6 + e_5 - e_4 - e_3 - e_2 - e_1$, où chaque e_i est un intervalle orienté positivement comme indiqué sur la Figure 4.1. On a

$$z \in C_1(R(z)) \quad \text{où} \quad R(z) = [0, 2] \times [0, 2].$$

Il s'en suit que $k_1 = 1$, $R_1(z) = \{0\} \times [0, 2]$, $\pi_1(z) = 0$,

$$[\pi_1(e_1), e_1] = [\pi_1(e_2), e_2] = [\pi_1(e_7), e_7] = [\pi_1(e_5), e_5] = [\pi_1(e_8), e_8] = 0,$$

$$[\pi_1(e_6), e_6] = E_4,$$

$$[\pi_1(e_4), e_4] = E_3 + E_4,$$

et

$$[\pi_1(e_3), e_3] = E_1 + E_2,$$

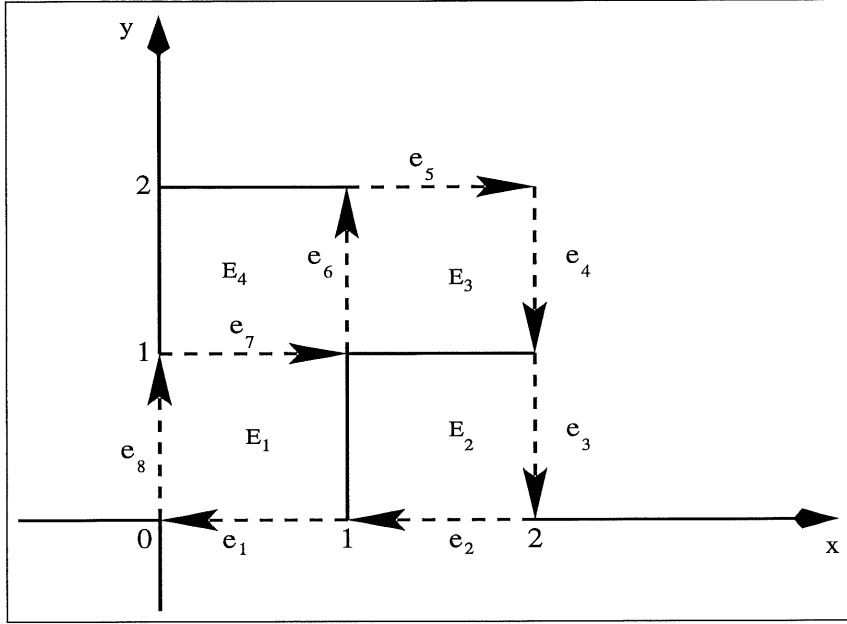


FIG. 4.1 – Exemple de construction de la cofrontière d'un cycle (dans le plan)

où E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des carrés orientés positivement comme indiqué dans la Figure 4.1. D'où

$$\begin{aligned} COF(z) &= COF(\pi_1(z)) + 0 + 0 + E_4 + 0 - E_4 - E_3 - E_1 - E_2 \\ &= -(E_1 + E_2 + E_3) \end{aligned}$$

Exemple 4.2 Soit, dans l'espace, le cycle réduit

$$z = \sum_{i=1}^6 c_i e_i = -e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6$$

où chaque e_i est un intervalle orienté positivement comme indiqué sur la Figure 4.2.

Soient $E_i, i = 1, \dots, 6$ les carrés ouverts indiqués sur la figure où E_1 est la base du cube $R(z)$, E_2 la face ayant e_1 et e_6 pour cotés, E_3 la face ayant e_2 et e_3 pour cotés et E_6, E_4, E_5 les faces opposées respectivement à E_1, E_2 et E_3 . On a

$$z \in C_1(R(z)) \quad \text{où} \quad R(z) = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1].$$

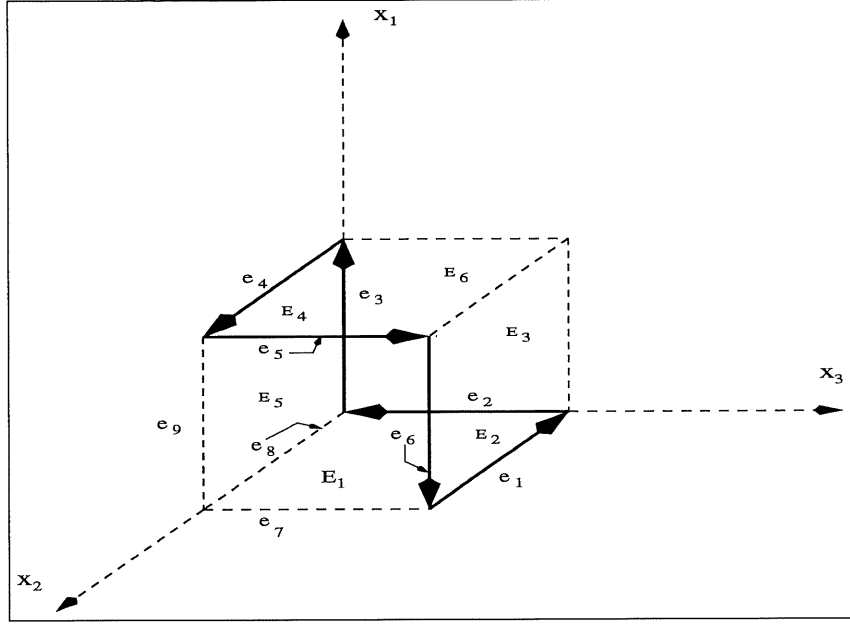


FIG. 4.2 – Exemple de construction de la cofrontière d'un cycle (dans \mathbb{R}^3)

Il s'en suit que $k_1 = 1$ et $R_1(z) = \{0\} \times [0, 1] \times [[0, 1]$. De plus, $\pi_1(e_1) = e_1$, $\pi_1(e_2) = e_2$, $\pi_1(e_3) = \pi_1(e_6) = 0$, $\pi_1(e_4) = e_8$ et $\pi_1(e_5) = e_7$. Il suit alors que

$$\pi_1(z) = -e_1 - e_2 + e_8 + e_7.$$

Il est clair par ailleurs que la projection de $\pi_1(z)$ sur l'axe des x_3 est $\pi_2(\pi_1(z)) = 0$. D'autre part, puisque

$$[\pi_2(e_1), e_1] = [\pi_2(e_8), e_8] = [\pi_2(e_2), e_2] = 0$$

et $[\pi_2(e_7), e_7] = E_1$ on a $COF(\pi_1(z)) = E_1$. On déduit finalement que

$$\begin{aligned} COF(z) &= E_1 + \sum_{i=1}^6 c_i [\pi_1(e_i), e_i] \\ &= E_1 - 0 - 0 + 0 + E_4 + E_5 - 0 \\ &= E_1 + E_4 + E_5. \end{aligned}$$

4.2 Exemples de représentations

Dans ce qui suit nous donnons des exemples simples de la construction de représentations illustrant les concepts d'applications presque parfaite et parfaite. Nous construisons des représentations pour des fonctions continues f qui sont déjà des applications simpliciales, il est de ce fait clair qu'on ne peut apporter aucune amélioration par rapport à la technique des approximations simpliciales au niveau du calcul de l'homomorphisme induit par f dans l'homologie. Les exemples pertinents d'applications à des fonctions nonlinéaires comportent des calculs numériques fastidieux qui exigent l'utilisation de programmes informatiques qui ne sont pas encore disponibles.

- (1) Soit le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 $X = \partial([0, 1]^2)$, i.e., X est la frontière du produit cartésien $[0, 1] \times [0, 1]$.

Nous définissons la paramétrisation de X par $P : [0, +\infty[\rightarrow X$, $(x, y) = P(t)$, où t est la longueur parcourue sur X , dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en allant de $P(0) = (0, 0)$ à (x, y) .

Soit alors la fonction $f : X \rightarrow X$ définie par $f(P(t)) = P(2t)$, $t \in [0, 4]$. La fonction f est univoque et continue dans X . Nous allons construire une représentation presque parfaite de f et calculer son homologie.

Considérons la grille cubique \mathcal{E}_k de pas $\frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) dans \mathbb{R}^2 dont les cellules sont données par la formule

$$e_k = \frac{1}{k}(x + Q), \quad \text{où } x \in \mathbb{Z}^2, \quad Q = I_1 \times I_2 \quad \text{et} \quad I_j =]0, 1[, \{0\} \text{ ou } \{1\}.$$

Il est clair que X est un ensemble représentable relativement à \mathcal{E}_k . Par ailleurs, on peut facilement voir que le choix de \mathcal{E}_1 comme grille ne permettra pas la construction d'une représentation presque parfaite de f à valeurs dans X . Cependant, cela devient possible pour \mathcal{E}_k avec $k \geq 2$. En effet, soit $k = 2$. On définit F sur les cellules primitives, i.e. les intervalles Σ_i indiqués sur la Figure 4.3, par

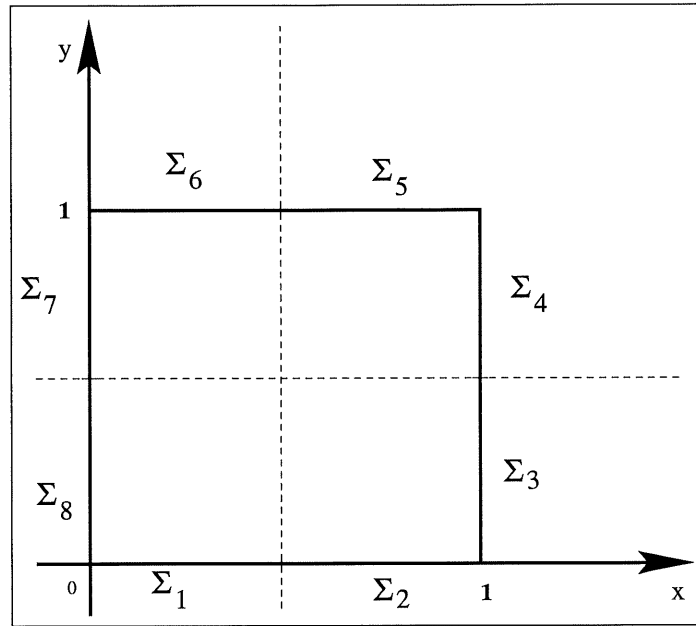


FIG. 4.3 – *Exemple de représentation presque parfaite*

$$\begin{aligned}
 F(\Sigma_1) &= [0, 1] \times \{0\}, & F(\Sigma_2) &= \{1\} \times [0, 1], & F(\Sigma_3) &= [0, 1] \times \{1\} \\
 F(\Sigma_4) &= \{0\} \times [0, 1], & F(\Sigma_5) &= [0, 1] \times \{0\}, & F(\Sigma_6) &= \{1\} \times [0, 1] \\
 F(\Sigma_7) &= [0, 1] \times \{0\} & \text{et} & & F(\Sigma_8) &= \{0\} \times [0, 1].
 \end{aligned}$$

Il s'en suit immédiatement que F a des valeurs non vides, fermées et convexes sur les cellules primitives et des valeurs étoilées sur les sommets (les sommets sont les seules faces propres des cellules primitives). En effet, on peut remarquer par

exemple que

$$F(0,0) = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]),$$

et le même travail peut être fait pour chaque sommet.

On définit maintenant l'application de chaîne φ induite par F :

Sur les sommets:

$$\varphi(0,0) = (0,0) \text{ puisque } \mathcal{A}(0,0) = ([0,1] \times \{0\}) \cap (\{0\} \times [0,1]) = \{(0,0)\}.$$

Par des arguments similaires,

$$\begin{aligned} \varphi(\tfrac{1}{2}, 0) &= (1,0), & \varphi(1,0) &= (1,1), & \varphi(1, \tfrac{1}{2}) &= (0,1), \\ \varphi(1,1) &= (0,0), & \varphi(\tfrac{1}{2}, 1) &= (1,0), & \varphi(0,1) &= (1,1) \quad \text{et} \\ \varphi(0, \tfrac{1}{2}) &= (0,1) \end{aligned}$$

Sur les cellules de dimension 1:

φ est calculée de la manière suivante:

Par exemple, puisque

$$\partial\varphi(\Sigma_1) = \varphi(\tfrac{1}{2}, 0) - \varphi(0,0) = \partial(\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

il s'en suit que $\varphi(\Sigma_1) := \Sigma_1 + \Sigma_2$ et on procède de manière similaire pour les cellules restantes.

$H_1(X)$ est engendré par le cycle

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_8.$$

On obtient $\varphi_1(\Sigma) = 2\Sigma$, d'où

$$H_1(f) = (\varphi_1)_* = 2 \operatorname{Id}_{H_1(X)}.$$

- (2) Nous illustrons dans cet exemple le concept d'application parfaite en construisant une représentation parfaite de l'application identité $f(x) = x$ dans l'ensemble $X = \partial([0, 1]^2)$. La Figure 4.4 montre l'ensemble $Z = \text{st}_{\mathcal{E}_3} X$ introduit dans la section 3.2.

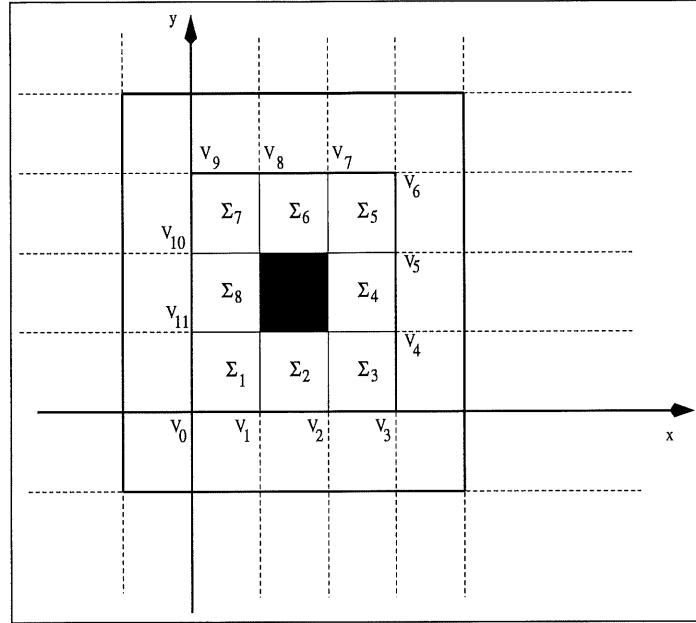


FIG. 4.4 – *Exemple de représentation parfaite*

La représentation parfaite F de f est donnée comme suit:

$$F : X \longrightarrow \text{st}_{\mathcal{E}_3} X,$$

telle que $F(V_0) = \overline{\Sigma_1}$, $F(V_1) = \overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}$, $F(V_2) = \overline{\Sigma_2} \cup \overline{\Sigma_3}$, $F(V_3) = \overline{\Sigma_3}$, $F(V_4) = \overline{\Sigma_3} \cup \overline{\Sigma_4} \dots$, où les sommets V_i et les carrés Σ_i sont ceux indiqués sur la Figure 4.4.

On déduit alors que $F([V_0, V_1]) = \overline{\Sigma_1} \cap (\overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}) = \overline{\Sigma_1}$, et $F([V_1, V_2]) = (\overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}) \cap (\overline{\Sigma_2} \cup \overline{\Sigma_3}) = \overline{\Sigma_2} \dots$

On peut aisément vérifier que pour chaque cellule $e \in \mathcal{E}_3(X)$, on a l'inclusion $e \subset \mathcal{A}(e)$ ce qui montre que l'application de chaîne $\varphi : C(X) \longrightarrow C(\text{st}_{\mathcal{E}_3} X)$ définie par $\varphi(e) = e$ est une application de chaîne induite par F . On déduit immédiatement que, $\varphi_* = Id_{H(X)}$.

4.3 Application à l'indice de Conley

L'indice de Conley est un invariant topologique défini pour des ensembles invariants isolés dans la théorie des systèmes dynamiques. Il est originalement construit pour des flots sur des espaces métriques localement compacts puis la théorie est généralisée pour des espaces métriques quelconques, pour des flots multivoques, pour des systèmes dynamiques discrets et enfin pour des systèmes dynamiques multivoques discrets. Étant donné un système dynamique, la théorie de l'indice de Conley permet de localiser les points stationnaires, les trajectoires bornées, les connections hétérocliniques et même les trajectoires périodiques qui lui sont associées. Les plus récents résultats dans ce domaine concernent la présence du chaos dans certains systèmes dynamiques (voir par exemple MISCHAIKOW et MROZEK[21], MISCHAIKOW et al.[22] et ZGLICZYNSKI[32]).

L'étude d'un système dynamique discret se résume dans l'analyse des itérations de son générateur f qui est le plus souvent une application continue provenant d'une certaine investigation numérique. La fonction f n'est donc pas connue de façon précise, mais des estimations d'erreurs permettent de déterminer des ensembles où ses valeurs exactes sont localisées. On obtient alors de manière naturelle une application multivoque F ayant f comme sélection et dont le graphe est une union finie de cubes d'une certaine grille

convexe de \mathbb{R}^n . Ce genre d'application peut se représenter par un nombre fini de données; on dira dans ce cas que F est une application représentable et également une représentation multivoque de f .

Les applications multivoques représentables possèdent des propriétés topologiques intéressantes qui se transfèrent à chacune de leurs sélections continues. Cela permet de vérifier ces propriétés pour des applications continues via des calculs combinatoires finis sur des applications multivoques représentables. Cette approche a rendu nécessaire le développement de la théorie de l'indice de Conley pour des systèmes dynamiques multivoques discrets dont les générateurs sont des applications multivoques admissibles (voir KACZYNSKI et MROZEK[12]). Nous allons introduire dans ce qui suit les concepts importants reliés à ce sujet.

4.3.1 Voisinages isolants et paires pour l'indice

Soient (X, d) un espace métrique localement compact et $A, B \subset X$. Définissons

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}, \quad A, B \subset X$$

et dénotons par ∂A la frontière de A , $\text{int } A$ son intérieur et pour $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(A) = \{x \in X : \text{dist}(\{x\}, A) < \varepsilon\}.$$

Définition 4.1 *Un système dynamique multivoque discret (sdmd) est une application multivoque $\pi : X \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ semi-continue supérieurement, à valeurs compactes et satisfaisant*

1. Pour tout $x \in X$, $\pi(x, 0) = \{x\}$.

2. Pour tout $x \in X$, pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec $mn \geq 0$,

$$\pi(\pi(x, m), n) = \pi(x, m + n).$$

3. Pour tout $(x, y) \in X \times X$, $y \in \pi(x, -1) \iff x \in \pi(y, 1)$.

En utilisant la notation $\pi^n(x) = \pi(x, n)$, on peut noter que π^n est la composition n fois de l'application $\pi^1 : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ ou de son inverse $(\pi^1)^{-1}$ (comme défini au début de la section 2.2). L'application $F = \pi^1$ est appelée le *générateur* du *sdmd* π . Dans la suite, nous identifions le système dynamique π avec son générateur F .

Étant donné $x \in X$, nous appelons *orbite* (respectivement, *orbite positive*, *orbite négative*) de x pour F toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (respectivement, $\{x_n\}_{n \geq 0}$, $\{x_n\}_{n \leq 0}$) telle que

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad x_{n+1} \in F(x_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (respectivement, $n \geq 0$, $n \leq 0$).

Soit $N \subset X$. Nous dénotons par $\text{Inv}(N, F)$ (respectivement, $\text{Inv}^+(N, F)$, $\text{Inv}^-(N, F)$) l'ensemble des $x \in N$ tels qu'il existe une orbite (respectivement, orbite positive, orbite négative) de x pour F contenue dans N . Il est aisé de voir que $\text{Inv}(N, F) = \text{Inv}^+(N, F) \cap \text{Inv}^-(N, F)$. Définissons

$$\text{diam}_N F := \sup\{\text{diam } F(x) : x \in N\}.$$

Soit $F_N : N \longrightarrow \mathcal{P}(N)$ l'application donnée par

$$F_N(x) := F(x) \cap N, \quad x \in N.$$

On peut vérifier que les applications F_N , F_N^{-1} ainsi que leurs itérations définies récursivement par la formule $F_N^{n+1}(x) := F_N(F_N^n(x))$ sont semi-continues supérieurement. Il

est démontré dans KACZYNSKI et MROZEK[12] que si $N \subset X$ est compact, alors

1. $\text{Inv}^+(N, F) = \bigcap_{n \geq 0} F_N^{-n}(N),$
2. $\text{Inv}^-(N, F) = \bigcap_{n \geq 0} F_N^n(N).$

Il suit que les ensembles $\text{Inv}^+(N, F)$, $\text{Inv}^-(N, F)$ et $\text{Inv}(N, F)$ sont compacts.

Un sous-ensemble compact $N \subset X$ est dit être un *voisinage isolant* pour F si

$$B_{\text{diam}_N F}(\text{Inv}(N, F)) \subset \text{int } N$$

ou, de façon équivalente, si

$$\text{dist}(\text{Inv}(N, F), \partial N) > \text{diam}_N F.$$

Un sous-ensemble $S \subset X$ est appelé un *ensemble invariant isolé* pour F si il existe un voisinage isolant $N \subset X$ tel que $S = \text{Inv}(N, F)$. Une paire $P = (P_1, P_2)$ de sous-ensembles compacts $P_2 \subset P_1 \subset N$ est appelée une *paire pour l'indice* pour F et N si les conditions suivantes sont réunies:

1. $F(P_i) \cap N \subset P_i, \quad i = 1, 2,$
2. $F(P_1 \setminus P_2) \subset N,$
3. $\text{Inv}(N, F) \subset \text{int}(P_1 \setminus P_2).$

Le résultat suivant est démontré dans KACZYNSKI et MROZEK[12]:

Théorème 4.1 *Soit N un voisinage isolant pour F et W un voisinage de $\text{Inv}(N, F)$ dans N . Il existe une paire pour l'indice P pour F et N telle que $P_1 \setminus P_2 \subset W$.*

Il est bien connu que le voisinage isolant est un objet stable par rapport aux perturbations continues du générateur. Sous certaines conditions, on peut obtenir également des paires pour l'indice stables (voir ALLILI et KACZYNSKI[1] et KACZYNSKI et MROZEK[13]).

4.3.2 Définition de l'indice de Conley

Soient X et Y deux espaces métriques localement compacts. Nous dénotons par $\mathcal{A}_c(X)$ la famille des sous-ensembles compacts, non vides et acycliques de X et $H^*(.)$ le foncteur de la cohomologie de Čech ou d'Alexander-Spanier à coefficients dans un corps. Cependant, nous utilisons la notation $H^*(f) = f^*$ dans le cas d'une application.

Se rappelant le théorème de Vietoris-Begle (voir SPANIER[29], Ch. VI, Section 9), toute application $F : X \rightarrow \mathcal{A}_c(Y)$ semi-continue supérieurement induit un homomorphisme $F^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ dans la cohomologie comme suit. Soient $p : G(F) \rightarrow X$ et $q : G(F) \rightarrow Y$ les projections canoniques. On déduit que $p^* : H^*(X) \rightarrow H^*(G(F))$ est un isomorphisme puisque p est une application de Vietoris et on définit alors

$$F^* := (p^*)^{-1} q^*.$$

La définition ci-dessus s'étend naturellement aux applications multivoques définies sur des paires d'espaces $F : (X, A) \rightarrow (\mathcal{A}_c(Y), \mathcal{A}_c(B))$, i.e. des applications multivoques $F : X \rightarrow \mathcal{A}_c(Y)$ avec $F(A) \subset B$, où A est un sous-ensemble fermé de Y et on obtient ainsi des homomorphismes $F^* : H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X, A)$ induits dans la cohomologie relative.

Proposition 4.1 (voir KACZYNSKI et MROZEK[12]). *Si N est un voisinage isolant pour F et $P = (P_1, P_2)$ est une paire pour l'indice pour F et N , alors*

1. $(P_1, P_2) \subset (P_1 \cup F(P_2), P_2 \cup F(P_2)) \subset (P_1 \cup (X \setminus \text{int } N), P_2 \cup (X \setminus \text{int } N))$.
2. *Les inclusions ci-dessus induisent des isomorphismes dans la cohomologie relative.*

Posons $T(P) := (P_1 \cup (X \setminus \text{int } N), P_2 \cup (X \setminus \text{int } N))$, $i_P : P \rightarrow T(P)$ l'inclusion usuelle et $F_P : P \rightarrow \mathcal{A}_c(T(P))$ la restriction de F . L'endomorphisme I_P de $H^*(P_1, P_2)$ donné

par la formule

$$I_P := F_P^* \circ (i_P^*)^{-1}$$

est appelé l'*application pour l'indice* de F associée à P .

La définition de l'indice de Conley d'un ensemble invariant isolé $S = \text{Inv}(N, F)$ qui s'y prête le plus à l'algorithmisation et aux calculs est celle donnée dans MROZEK[23] via le procédé de *réduction de Leray* que nous rappelons ci-dessous.

Posons $E := H^*(P)$ et $T := I_P$. Rappelons que le *noyau généralisé* de T est défini par

$$\text{Ker}_g T := \bigcup_{n \geq 1} \text{Ker} T^n$$

et puisque $\text{Ker} T^n \subset \text{Ker} T^{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, $\text{Ker}_g T$ est un sous-espace vectoriel de E . Grâce à l'inclusion $T(\text{Ker}_g T) \subset \text{Ker}_g T$, l'endomorphisme quotient

$$T' := [T] : E' \longrightarrow E' \quad \text{avec} \quad E' = \frac{E}{\text{Ker}_g T}$$

est bien défini. Dans les applications, E' est souvent de dimension finie et alors $(T')^n$, $n \geq 1$ est un automorphisme. De façon générale, soit $E'' = \text{Im}_g T'$, l'*image généralisée* de T' définie par

$$E'' = \text{Im}_g T' = \bigcap_{n \geq 0} \text{Im} \left((T')^n \right).$$

Puisque $T'(E'') = E''$, la restriction $T'' = T'|_{E''} : E'' \longrightarrow E''$ de T' à E'' est un automorphisme de E'' . La *réduction de Leray* de la paire (E, T) est par définition la paire $L(E, T) := (E'', T'')$ composée de l'espace vectoriel gradué $E'' := \{E''_n\}_{n \geq 0}$ et de son automorphisme $T'' := \{T''_n : E''_n \longrightarrow E''_n\}_{n \geq 0}$.

L'indice de Conley de S est alors défini par la formule

$$\text{Con}^*(S) = \left(CH^*(S), \mathcal{X}^*(S) \right) := L \left(H^*(P), I_P \right). \quad (4.6)$$

Remarque 4.1 Nous avons omis délibérément de parler des propriétés fonctorielles de l'indice de Conley que le lecteur intéressé peut trouver dans KACZYNSKI et MROZEK[12], MROZEK[23] et SZYMCZAK[31]. Il est notamment montré que cette définition est indépendante du choix du voisinage isolant N de S et de la paire pour l'indice P pour F et N . Si F est une application continue univoque générée par un flot, I_P est simplement l'identité et alors $L(H^*(P), I_P) = (H^*(P), Id)$. Dans la définition de l'indice de Conley, on peut remplacer $H^*(.)$ par n'importe quelle cohomologie satisfaisant les propriétés d'homotopie, excision, invariance de la dimension, continuité et exactitude. Dans le cas des applications aux ensembles et aux applications représentables, nous travaillons avec des polyèdres finis et des applications telles que les images et images inverses de polyèdres finis par ces applications sont des polyèdres finis. Dans ce cas, la définition précédente reste valable pour toute cohomologie, toute homologie et tout anneau de coefficients.

4.3.3 Indice de Conley et applications représentables

Soient \mathcal{E}_k la grille cubique de pas $\frac{1}{k}$ dans \mathbb{R}^n et \mathcal{R}_k la famille des sous-ensembles \mathcal{E}_k -représentables de \mathbb{R}^n . Pour tout $X \in \mathcal{R}_k$, nous définissons

$$\mathcal{E}_k^q := \{e \in \mathcal{E}_k : \dim e = q\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_k^q(X) = \mathcal{E}_k(X) \cap \mathcal{E}_k^q,$$

$$\mathcal{E}_k^{max}(X) := \{\sigma \in \mathcal{E}_k : \sigma \text{ est primitive dans } X\},$$

$$o_k(X) := \cup\{e \in \mathcal{E}_k : \bar{e} \cap X \neq \emptyset\},$$

$$st_k(X) := \overline{o_k(X)} = \cup\{\bar{e} : e \in \mathcal{E}_k, \bar{e} \cap X \neq \emptyset\}.$$

Soient $X \in \mathcal{R}_k$ et $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque représentable. Si $N \subset X$ est représentable alors F_N est représentable et $\text{diam}_N F$ se calcule en un temps fini. De plus, il existe des nombres p et q dans \mathbb{N} tels que

$$1. \text{Inv}^+(N, F) = \bigcap_{n \geq 0} F_N^{-n}(N) = \bigcap_{n=0}^p F_N^{-n}(N),$$

$$2. \operatorname{Inv}^-(N, F) = \bigcap_{n \geq 0} F_N^n(N) = \bigcap_{n=0}^q F_N^n(N).$$

Il suit que les ensembles $\operatorname{Inv}^+(N, F)$, $\operatorname{Inv}^-(N, F)$ et $\operatorname{Inv}(N, F)$ sont des ensembles représentables. On peut trouver les démonstrations détaillées des résultats ci-dessus dans MROZEK[25]. Si N est un voisinage isolant \mathcal{E}_k -représentable pour F , alors la paire $P = (P_1, P_2)$ définie par

$$P_1 := \operatorname{st}_m(\operatorname{Inv}^-(N, F)), \quad P_2 := P_1 \setminus \operatorname{o}_m(\operatorname{Inv}^+(N, F)),$$

est une paire d'ensembles \mathcal{E}_m -représentables et également une paire pour l'indice pour F et N et ce, pour tout entier naturel $m > 0$ et multiple de k . On peut trouver dans MROZEK[25] et SZYMCZAK[30] des algorithmes permettant en un temps fini la vérification qu'un ensemble représentable N est un voisinage isolant pour F et le calcul d'une paire pour l'indice représentable pour F et N . Le calcul de l'indice de Conley $\operatorname{Con}^*(S)$ de $S = \operatorname{Inv}(N, F)$ se réduit maintenant au calcul d'un homomorphisme induit dans l'homologie ou la cohomologie, ce qui fut l'objet de notre travail.

Considérons une application continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et un voisinage isolant M pour f et posons $S = \operatorname{Inv}(M, f)$. On peut trouver $k \geq 1$ et un voisinage isolant $N \in \mathcal{R}_k$ pour f tel que $S = \operatorname{Inv}(N, f)$. Quitte à considérer X relativement à une grille plus fine \mathcal{E}_m , $m \geq 1$, $k|m$, on peut construire (voir Théorème 2.1) une représentation $F : X \longrightarrow \mathcal{R}_m$ de f telle que $\operatorname{diam}_N F < \operatorname{dist}(\operatorname{Inv}(N, F), \partial N)$. Il suit que N est un voisinage isolant pour F et l'étude de l'indice de Conley pour f se réduit à l'étude de l'indice de Conley pour F .

CONCLUSION

Nous avons donné dans le cadre de cette thèse les outils algébriques et géométriques nécessaires à la construction algorithmique de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue. Cela représente une étape importante vers l'automatisation du calcul de l'homologie et de l'investigation de systèmes dynamiques en se servant des outils informatiques via la théorie de l'indice de Conley. Nous avons utilisé les concepts d'ensembles et d'applications représentables introduits initialement par MISCHAIKOW et MROZEK[21] dans leur célèbre preuve de l'existence du chaos dans les équations de Lorenz comme outils de transition entre les objets des mathématiques du continu ayant de bonnes propriétés topologiques et les objets combinatoires qu'on peut coder avec un nombre fini de données.

Étant donnée une fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ possédant une constante de Lipschitz ou plus généralement un module de continuité uniforme, où X, Y sont des ensembles représentables, disons relativement à la grille cubique unitaire \mathcal{E}_1 dans \mathbb{R}^n , on peut construire grâce au Théorème 2.1 une représentation $F : X \longrightarrow Z = \text{st}_{\mathcal{E}_3}(Y)$ de f quitte à considérer X et Y relativement à une grille plus fine \mathcal{E}_k , $k \geq 1$. L'homomorphisme $F_* : H(X) \longrightarrow H(Z)$ induit dans l'homologie par F s'obtient de façon explicite et combinatoire. Cela repose entièrement sur la construction explicite de l'application de

chaîne associée à F obtenue dans le Théorème 2.2 et réalisée géométriquement dans la première section du Chapitre 4. Nous avons bien sûr vérifié que cette construction est indépendante des choix de l'application de chaîne et de la subdivision et elle coïncide avec la définition classique de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application multivoque. Il s'agit ensuite d'invoquer les Théorèmes 3.4 et 3.5 et la formule (3.7) pour construire l'homomorphisme $f_* : H(X) \longrightarrow H(Y)$ induit par f dans l'homologie. Cela démontre d'une part que la construction de f_* est algorithmisable et d'autre part que l'homologie d'une application, tout comme les notions de voisinage isolant et de paire pour l'indice indispensables au calcul de l'indice de Conley pour un système dynamique donné, est une propriété qui se transfère d'une application multivoque admissible à chacune de ses sélections continues. L'importance de cette dernière propriété réside dans le fait que lors des applications, la fonction f n'est pas connue de façon précise. Elle est souvent investiguée numériquement et les estimations d'erreurs permettent seulement de déterminer des ensembles où ses valeurs exactes sont localisées.

Une suite logique pour ce travail consisterait en l'écriture de l'algorithme qui permet le calcul de l'homomorphisme induit dans l'homologie par une application continue donnée. Il s'agit ensuite de faire l'étude de sa complexité et de voir si l'ajout et/ou le retrait de certaines hypothèses n'apporteraient pas une amélioration à cette dernière.

D'autre part, il serait intéressant de poursuivre ce travail d'algorithmisation pour la cohomologie et d'autres invariants topologiques et réaliser des applications concrètes en étudiant les aspects combinatoires et calculatoires de problèmes à caractère topologique.

Bibliographie

- [1] ALLILI M., KACZYNSKI T., Stability of index pairs for flows, Proc. of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, *Nonlinear Anal.*, Vol. 30:7 (1997), 4113-4122.
- [2] ALLILI M., KACZYNSKI T., An algorithmic approach to the construction of homomorphisms induced by maps in homology, 23 pages, à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [3] BEGLE E., The Vietoris mapping theorem for bicomact spaces, *Ann. Math.*, **51** (1950), 534-543.
- [4] DELFINADO C.J.A. & EDELSBRUNNER H., An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere, *Computer Aided Geometric Design*, **12** (1995), 771-784.
- [5] DEY T.K. & GUHA S., Algorithms for manifolds and simplicial complexes in Euclidean 3-space, *In Proc. 28th ACM Sympos. Theory Comput.*, (1996), 398-407.
- [6] DEY T.K., EDELSBRUNNER H. & GUHA S., Computational Topology, version préliminaire.
- [7] DOLD D., Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).
- [8] EHRENBORG R. & HETYEI G., Generalizations of Baxter's Theorem and Cubical Homology, *J. Combinatorial Theory*, Series A, 69 (1995), 233-287.

- [9] GÓRNIIEWICZ L., Homological Methods in Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **129** (1976), 1-71.
- [10] ILLIOPOULOS C. S., Worst case complexity bounds on algorithms for computing the canonical structure of finite abelian groups and Hermite and Smith normal form of an integer matrix, *SIAM J. Computing* **18** (1989), 658-669.
- [11] KACZYNSKI T., Conley index for set-valued maps: From theory to computation, à paraître dans *Proc. Conley Index Workshop, Banach Center Pub.*
- [12] KACZYNSKI T. & MROZEK M., Conley index for discrete multivalued dynamical systems, *Topology and its Appl.* **65** (1995), 83-96.
- [13] KACZYNSKI T. & MROZEK M., Stable index pairs for discrete dynamical systems, à paraître dans *Canad. Math. Bull.*
- [14] KACZYNSKI T. & MROZEK M., Connected simple systems and the Conley functor, à paraître dans *Topol. Meth. in Nonlin. Anal.*
- [15] KACZYNSKI T., MROZEK M. & ŚLUSAREK M., Homology computation by reduction of chain complexes, à paraître dans *Computers and Mathematics.*
- [16] KACZYNSKI T., KARLOFF H., MISCHAIKOW K. & MROZEK M., Introduction to Algebraic Topology: A Computational Perspective, livre en progrès.
- [17] LECKI A. & SZAFRANIEC Z., An algebraic method for calculating the topological degree, *Banach Center Publ.* Vol. 35, Warsaw 1996, 73-83.
- [18] MASSEY W. S., A Basic Course in Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York (1991).
- [19] MISCHAIKOW K., Conley Index Theory, *Dynamical Systems: Montecatini Terme 1994*, eds. L. Arnold and C. Jones, *Lecture Notes in Math.* No. 1609, Springer (1995).
- [20] MISCHAIKOW K., MROZEK M., SZYMCZAK A. et REISS J., From time series to symbolic dynamics: An algebraic topological approach, version préliminaire.

- [21] MISCHAIKOW K., MROZEK M., Chaos in the Lorenz equations: a computer assisted proof, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **32** (1995), 66-72.
- [22] MISCHAIKOW K., MROZEK M. & SZYMCZAK K., Chaos in the Lorenz equations: a computer assisted proof, Part III: the classical case, version préliminaire.
- [23] MROZEK M., Leray functor and cohomological index for discrete dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), 149-178.
- [24] MROZEK M., Topological invariants, multivalued maps and computer assisted proofs in dynamics, *Computers and Mathematics* **32** (1996), 83-104.
- [25] MROZEK M., An algorithmic approach to the Conley index theory, à paraître dans *Proc. Conf. Topological Methods in Differential Equations*.
- [26] MROZEK M., The Conley index and rigorous numerics, Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, *CISM Courses and Lectures* Vol. 371 (1996), Springer-Verlag, Wien, 175-196.
- [27] MUNKRES J. R., Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley (1984).
- [28] SIEGBERG H. W. & SKORDEV G., Fixed point index and chain approximations, *Pacific Journal of Mathematics* **102**. No. 2 (1982), 455-486.
- [29] SPANIER E. H., Algebraic Topology, McGraw-Hill (1966).
- [30] SZYMCZAK A., A combinatorial procedure for finding isolating neighbourhoods and index pairs, à paraître dans *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*.
- [31] SZYMCZAK A., The Conley index for discrete semidynamical systems, *Topology Appl.* **66** (1995), 214-240.
- [32] ZGLICZYNSKI P., Fixed points for iterations of maps, topological horseshoe and chaos, *Top. Meth. in Nonlin. Anal.* **8** (1996), 169-177.
- [33] ZGLICZYNSKI P., Computer assisted proofs of chaos in the Rössler equations and the Hénon map, *Nonlinearity* **10** (1997), 243-252.